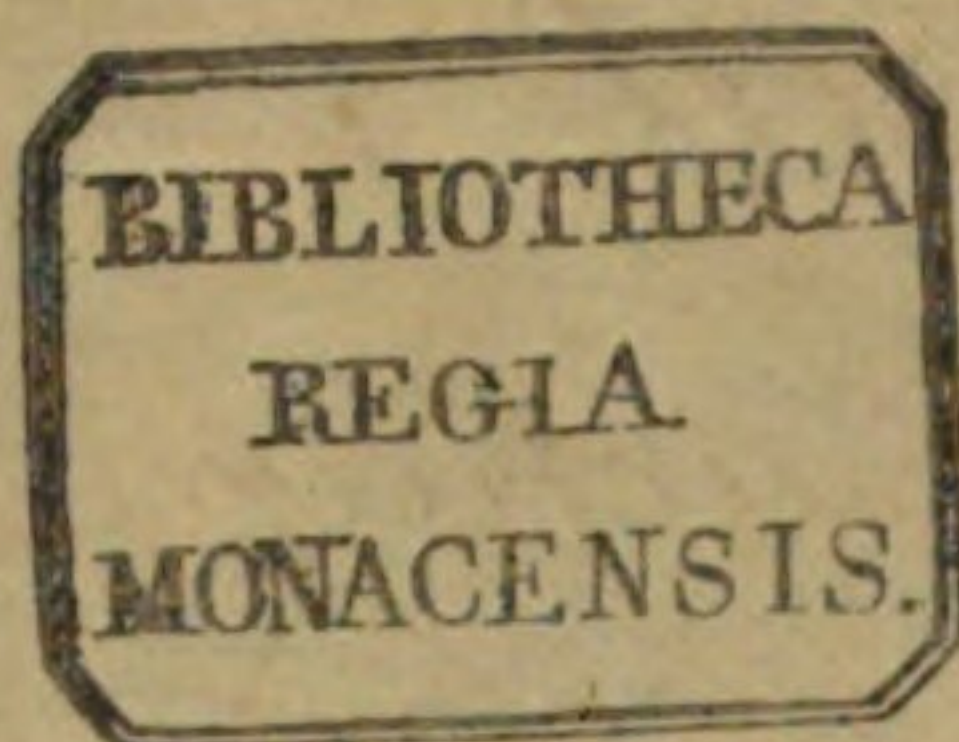


Berichtigungen:

- Teile 7 von unten: statt ξ lese man: ξ und ψ .
— 5 von unten ist: „ ψ , noch,“ zu streichen.
— 4 von unten: statt $f\xi$ lese man beide Male
vielmehr: $f(\xi, \psi)$.
— 3 von unten: statt ξ lese man: ξ und ψ .

Auf der Figurentafel II ist in Figur 8 da, wo die
ste zu α die Linie gk schneidet, der Buchstabe
setzen.

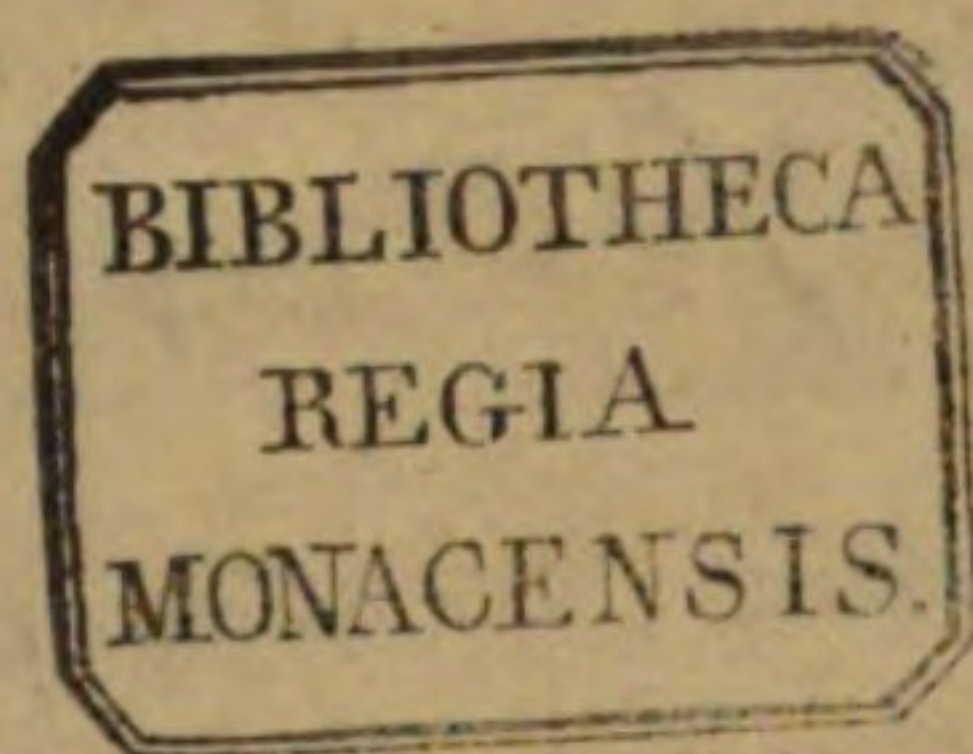


dem Ei

der Artiller

die Unzul

Hauptmann d



1. Es stellt
filhafter her
ihre Bahn
erheblich, da
in bestimm
Besondere d
nem bestimm
stimmten En
wesentlich v
hängt, in w
dessen Umde
Robins s
(in seinem :
sen Gegensta
terer ist seit
1839, also n
Poisson) ein
tersuchung
Der Verfa
sicht, in der
a, eine Lu
jetzt en
legenhe
geword
b, nachzu
i

1
stellt sich jetzt immer bestimmter und unzwei-
felhaft heraus, dass die Umdrehung der Geschosse auf
ihre Bahn einen sehr erheblichen Einfluss hat; so
viel, dass die Grösse der Wahrscheinlichkeit,
ein bestimmtes Ziel überhaupt zu treffen, so wie ins-
besondere die Möglichkeit, das Geschoss unter ei-
nem bestimmten Einfallswinkel und mit einer be-
stimmten Endgeschwindigkeit an das Ziel zu bringen,
von dem Kenntniss der Art und Weise ab-
hängt, in welcher die Bahn des Geschosses durch
die Umdrehung um sich selbst modificirt wird.
Es scheint der erste gewesen zu sein, der
dies : *New principles of gunnery*, 1742.) die-
sen Stand zur Sprache gebracht hat. Letz-
tens wird wiederholt besprochen, aber erst
etwa nahe hundert Jahre später (von Herrn
Laplace) einer ausführlichen mathematischen Un-
tersuchung unterworfen worden.

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit hat die Ab-
sicht, denselben

Zusammenstellung der verschiedenen bis
her erfolgten Äusserungen über diese Ange-
legenheit zu geben, so weit sie ihm bekannt
worden sind,

zu zeigen, dass die mühevollen Arbeit des

ern Poisson keineswegs das Ziel erreicht hat,
gewünschte Aufklärung in dieser deliranten
aterie zu gewähren,

gegenwärtigen Stand dieser Angelegenheit
ergestalt zu bezeichnen, dass es denjenigen,
welche Kraft und Beruf in sich fühlen, er-
richtert wird, zu erkennen, wohin fernere
Bestrebungen eigentlich zu richten sind.

Thatsache, um deren Aufklärung es sich
ist bereits in mehreren neueren artilleri-
Werken, z. B. in

i d'un traité d'artillerie par Timmerhaus.

is 1841. Tome II, Seite 113 und 114

bezeichnet und besteht im Wesentlichen in Fol-

. Wenn man ein Geschoss von so vollkommene-
r Kugelgestalt, als die Technik diese her-

vermag, bei welchem aber Schwerpunkt und
nicht zusammenfallen, dergestalt in

schütz ladet, dass der Schwerpunkt seitwärts

von Mittelpunkt, mithin seitwärts von der ver-
richtungssebene zu liegen kommt, so weicht

Geschoss, wenn man das Geschütz abfeuert, be-

ich, und so oft man den Versuch wiederholen

immer nach der Seite hin ab, auf welcher der

schwerpunkt im Geschützrohr lag. Befand sich

Derselbe also
vertikalen
nach dem
links ab. De
Ständen sehr
len mehrere
das Geschoss
ber oder gerade
zu liegen
gen und mi
des Geschütz
andern Falle
schoss unter
aber Schwer
3. Mieber
kennerwerth.
einem größt
führen also
fänglich ein
mehr muss
mag, währen
wirken.
und genau
man das
wo ein Str

also nach dem Einladen rechts oder links der
 len Richtungsebene, so weicht das Geschoss
 m Abfeuern auch respective rechts oder
 . Diese Abweichungen können unter Um-
 sehr erheblich werden und betragen zwei-
 rere hundert Schritte. Ladet man dagegen
 kross so ein, dass der Schwerpunkt gerade ü-
 gerade unter dem Mittelpunkt desselben
 r kommt, so geht das Geschoss bei niedri-
 mittleren Winkelhöhen der Seelenachse
 ütrohrs im ersten Falle erheblich weiter, im
 Falle erheblich kürzer, als ein anderes Ge-
 ter sonst gleichen Umständen, bei welchem
 werpunkt und Mittelpunkt zusammenfallen.
 bei sind noch zwei Umstände sehr bemerk-
 k. Erstens wachsen die Abweichungen in
 größeren Verhältniss als die Entfernungen,
 also nicht von einer Ursache her, die nur an-
 eingewirkt, dann aber aufgehört hat; viel-
 aus die Ursache, welche sie immerhin sein
 während des Flugs des Geschosses continuirlich
 Zweitens findet dieselbe Erscheinung,
 au in derselben Weise, auch dann statt, wenn
 Geschoss unter Umständen fortschleudert,
 knstoffern an die Seelenwand des Geschützes

tfiridet, mithin über die Richtung seiner an-
Umdrehungsbewegung kein Zweifel obwal-
z. B. wenn man eine absichtlich excent-
emachte Kugel mittelst der Ludwigschen
schiene fortreibt, von welcher sich in der
chrift für Kunst, Wissenschaft und Ge-
kte des Krieges, Jahrgang 1842, zweites Heft,
- 114 eine Beschreibung vorfindet.
Diejenigen, welche den in Rede stehenden Ge-
besprochen haben, haben im Allgemeinen
auptfälle unterschieden, nemlich den Fall,
die äussere Gestalt des Geschosses vollkom-
ugelförmig, und sodann, wenn dieß nicht ist.
dem letztern Falle durch die Umdrehung
Geschosses im widerstehenden Mittel eine Ab-
g desselben aus seiner jedesmaligen Richtung
gebracht werden könne, leuchtet bald ein;
interessirt dieser Fall für die Artillerie-
zunächst weiter nicht, da man in dieser
ssere Kugelgestalt der Geschosse in möglich-
ollkommenheit herzustellen sucht, keine an-
Geschosse verwendet, als solche, welche nur
elich davon abweichen und da neben den ab-
noch bleibenden und unvermeidlichen Un-
keiten eine andere Ursache der Abweichung

der Geschosse
punktes mit d
ter gleichem U
lig immer glei
welche durch
statt, wie sie
erheblich) qua
führt werden
kommenen
der Einfluss,
möglicherweise
Für die Ma
Drehung giebt
eine liegt in
des Mittelpun
nach dem Lö
tenden Bewe
hungsbewegun
Punkte zugle
ursprünglich
Ursache lieg
the des Gesche
eine tangente
die nicht da
eine Umdreh

schosse in dem Nichtzusammenfallen des Schwer-
 punktes mit dem Mittelpunkt vorhanden ist, die un-
 gleichen Umständen thatsächlich und augenfäl-
 liger gleiche Wirkungen äussert; Wirkungen,
 durch die Unvollkommenheit der Kugelge-
 stalt, wie sie in der Praxis übrig bleibt, zwar (un-
 ter) quantitativ, nicht aber qualitativ modi-
 ficirt werden. Es bleibt also nur der Fall der voll-
 ständigen äusseren Kugelform, und bei dieser
 muss, wenn eine Umdrehung des Geschosses
 eintreten kann, zu betrachten übrig.
 Die Hervorbringung einer anfänglichen Um-
 drehung giebt es zwei verschiedene Ursachen. Die
 erste in einem etwaigen Nichtzusammenfallen
 des Schwerpunktes mit dem Mittelpunkt, welches
 Sätzen der Mechanik neben der fortschrei-
 tung des Geschosses auch eine Umdre-
 hung zur Folge hat, sobald nicht beide
 genau in der Richtungslinie des
 Stosses sich befinden. Die zweite
 liegt darin, dass die Reibung der Oberflä-
 che des Geschosses an den Seitenwänden des Geschützes
 eine Kraft erzeugt, mithin eine solche,
 durch den Schwerpunkt geht und daher
 eine Drehbewegung hervorbringen muss, der

...wurf des Geschosses mag mit dessen Mittel-
zusammenfallen oder nicht.

Und nun kommt der Einfluss der Umdrehung
des Geschosses auf eine Ablenkung desselben aus seiner
sich möglicher Weise in zwei verschiedenen
en geltend machen.

Allgemeiner muss man bedenken, dass die
vor der vorderen (dem Ziele zugewendeten)
Kugel des Geschosses nicht augenblicklich auswei-
chen kann, sondern sich vor dem Geschoss anhäuft
verdichtet, dergestalt, dass die Dichtigkeit der
anhängenden Luft zunächst der Kugeloberfläche
im dem vordersten Punkte der vorderen Halbkug-
el dichtester ist, von da ab aber, von der Ober-
seite an abwärts und von dem vordersten Punkte
rückwärts gerechnet, immer dünner wird. In
der hinteren Halbkugel wird dagegen entweder ein völ-
lig leerer Raum entstehen, oder aber die nachtheilen-
de atmosphärische Luft wird gegen das ausweichende
Geschoss nicht mehr ihren vollen Druck ausüben kön-
nen.

Dies vorausgesetzt sind nun die beiden mögli-
chen Fälle, auf welche die Umdrehung des Geschos-
ses wirksam werden kann, die nachstehenden.
Erstens tritt jedes Partikelchen von einem Theil der
Kugeloberfläche aus den dünneren Luftschichten allmäh-

lich in die dichte
Seite des Entz
kann möglic
Auswirkung d
die verschied
fläche zur
vielleicht ein
Ebene ist, d
augenblicklich
und welche
tung dieser
Zweitens a
der Kugelob
hervorgebra
partikelchen
für die vord
rer Seitenbe
ten, nach d
normal aus
augenblicklich
gelegt gedac
gegen eine
vorgewachte
bekanntlic
punkte von

7
die dichterem, während auf der entgegengesetzten
das Entgegengesetzte statt findet. Dieser Umstand
möglicherweise eine sehr verschiedene Art der
rung des gewöhnlichen Luftwiderstandes auf die
verschiedenen einzelnen Partikelchen der Kugelober-
zur Folge haben, und im Gesamtergebnisse
cht eine Kraft ergeben, welche normal auf der
ist, die durch die Tangente der Bahn und die au-
sichtliche Drehachse gelegt gedacht werden kann,
welche sodann eine Ablenkung nach der Rich-
tung dieser Normale hervorbringt.

Es ist aber auch denkbar, dass die Partikelchen
Kugeloberfläche bei ihrem durch die Umdrehung
verbrachten Seitwärtsvorbeischieben an dem Luft-
medium eine Reibung erleiden. Dann wird sich
vordere Halbkugeloberfläche eine der Richtung ih-
rer Bewegung entgegengesetzte Ablenkung erge-
ben, der Richtung einer geraden Linie, welche
auf derjenigen Ebene steht, die durch die au-
sichtliche Drehachse und die Tangente der Bahn
gelegt werden kann; für die hintere Fläche da-
her eben solche, der vorigen aber genau entge-
setzte Ablenkung. Beide Kräfte kann man
leicht parallel zu sich selbst nach dem Schwer-
punkt verlegen, um das Resultat der ablenkenden

zu erlangen. Da nun die Luft an der vorderen Halb-
kugel sich in sehr verdichteten Zustande befindet, an der
hintern dagegen ihre Wirkung theilweis aufgehoben ist,
so wird für die Wirkung gegen die vordere Halbkugel ein
Druck gegen die hintere Halbkugel übrig bleiben,
welcher in eine Ablenkung, deren Richtung der Seitwärts-
bewegung der vorderen Halbkugel entgegengesetzt ist, und
genau auf der mehrgedachten Ebene durch die augen-
scheinliche Drehachse und die Tangente der Bahn ist.
Welche von den beiden genannten
Ursachen in der That
wirkksam ist, oder ob sie es beide sind,
und nach welchen Gesetzen — diess
ist der Fragepunkt in der vorliegen-
den Angelegenheit.

9

Der erste, welcher diese Angelegenheit über-
setzt zur Sprache gebracht hat, scheint, wie schon
erwähnt, Robins gewesen zu sein, in seinem
new principles of gunnery,
welches 1742 zu London erschienen. Dies Werk wur-
de zunächst von Euler im Jahre 1745 ins Deut-
sche übersetzt und mit Bemerkungen versehen.
In der Allgem. geographische Ephemeriden-
Jahrgang 1807, Märzheft, enthalten darüber
Seite 368 eine sehr interessante Notiz, welche
im Folgenden wörtlich wiedergeben.

Robins hatte Eulers Mechanik, weil er sie nicht
verstand, ziemlich grob getadelt. Euler rächte
sich dadurch, dass er das Robins'sche Werk
übersetzte, dem Verfasser, wo immer möglich,
Gerechtigkeit widerfahren liess, die Fehler ge-
gen die Theorie darin verbesserte, und das
Werk mit Zusätzen und Erläuterungen be-
gleitete, denen es hauptsächlich seinen Ruhm
verdankt. . .

In der erweiterten Gestalt nun wurde das genannt.
Werk im Jahre 1783 von Lombard ins Französ-
ische übertragen, so dass man in dieser Überset-
zung die Urtheile der genannten drei Männer über
jede stehenden Gegenstand zusammen vor-

t, weshalb wir uns im Folgenden überall auf die
monte Übersetzung beziehen wollen.

bins hält sich vorzüglich an die Seitenabweichun-

Die Überschrift der betreffenden Proposition VII
481 ist wörtlich folgende:

Outre la force de la pesanteur, par laquelle les bou-
lets et les bombes sont attirés vers le centre de la
terre, ces projectiles sont encore entraînés par
une autre force, à droit ou à gauche du plan
vertical..

bins erwähnt Seite 482 auch der Verschiedenhei-

in der Schussweite, in so fern sie aus demselben
Orte entspringen mögen, benutzt sie aber nur, um

Behauptung zu erhärten, dass die Bahn des
Schusses auch im Bezug auf die Seitenabweichung
krümmt sei und sagt darüber auf Seite 482, nach-
dem er einige thatsächliche Beispiele angeführt hat:

„ la vérité de notre proposition est donc incon-
„ testable, n'étant pas possible que toutes ces va-
„ riations dans le mouvement de la balle aient
„ lieu, si la ligne qu'elle décrit n'étoit point
„ courbée dans le sens latéral aussi bien que dans
„ le sens vertical.. „

auf eine gründliche Untersuchung des eigentlichen
Vorgangs lässt Nobins sich nicht ein. Alles, was

er Stufklärung der Sache auf Seite 482 und 483
ist Folgendes :

puisque l'expérience ne laisse aucun doute sur
la réalité de la double courbure du chemin par-
couru par une balle, il est tout naturel de de-
mander, quelle peut être la cause d'un mouve-
ment aussi varié et si différent de tous ceux,
que nous avons considérés jusqu'à présent? Je
réponds, que ces déviations proviendront néces-
sairement d'une force, qui agit obliquement
sur la balle, et que cette force n'est autre cho-
se que la résistance de l'air. Mais comment
la résistance de l'air peut-elle exercer un effort
dirigé obliquement sur le mouvement d'une sphè-
re? Cela peut venir quelquefois de la forme ir-
régulière de la sphère, mais le plus ordinaire-
ment d'un mouvement de rotation de la sphère
sur elle-même. Car lorsqu'un pareil mouvement
accompagne le mouvement progressif, nécessai-
rement chaque partie de la surface doit frap-
per l'air suivant une direction bien différente
de ce qu'elle seroit, s'il n'y avoit point de mou-
vement de rotation; et l'obliquité de la résis-
tance de l'air occasionnée par cette cause, sera
autant plus grande, que ce mouvement

„ sera plus rapide par rapport au mouvement progressif: „

Robins abstrahirt also von einer Einwirkung der Reibung an der Luft gänzlich, er bringt sie nicht einmal zur Sprache, sondern er schreibt die Ablenkung des Geschosses rein dem Umstande zu, dass durch das Hintertreten der Umdrehungs- Bewegung zu der fortschreitenden die einzelnen Partikelchen der Kugeloberfläche Richtungen annehmen, die nicht mehr der Tangente der Bahn des Geschosses parallel sind.

8. Euler unterwirft nun dem Robins-schen Ausspruch einer ferneren Erwägung. Er macht dem Verfasser den Vorwurf, dass er sich nur sehr unvollkommen über den fraglichen Gegenstand ausgesprochen habe und sagt Seite 496:

„ l'auteur, dans cette proposition, ne donne sur
„ ce sujet que des notions très imparfaites et peu
„ propres à l'éclaircir. „

Allein Eulers eigene Äusserungen setzen die Sache aber so wenig in ein klareres Licht. Folgendes sind die wesentlichsten Äusserungen:

auf Seite 492. „ la vraie cause de l'incertitude des
„ coups ne vient donc que du défaut de sphéricité des boulets, et le mouvement de rotation n'y

aucune part, comme notre auteur le prétend. „
 er Seite 496: „ nous avons donc découvert la vraie
 cause de l'incertitude du tir, en ne l'attribuant, qu'à
 la seule figure des projectiles. „

noch Seite 496: „ car lorsque le boulet est exacte-
 ment sphérique, quand même le centre de gravité
 ne seroit pas le même, que le centre de figure, sa dé-
 viation latérale ne sauroit être sensible. „

Seite 501: „ il n'est donc aucun cas, où le mouve-
 ment progressif d'un boulet puisse être sensible-
 ment altéré par le mouvement de rotation. „

leicht man den Inhalt dieser Äußerungen mit dem,
 in nos 2, 3 und 4 des vorliegenden Aufsatzes ge-
 ist, so sieht man, dass Euler die Frage gar nicht
 richtig aufgefasst hat, oder dass er mindestens es ver-
 irrt hat, sich über den Thatbestand hinreichend
 erklären. Hätte er diess gethan, so würde er ge-
 haben, dass die Thatfachen seinem Endaus-
 sehen sehr augenfällig widersprechen.

Lombard tritt in seinen Zusätzen, Seite 494, in
 merkung (45) auf Robins Seite. Er führt meh-
 neue Thatfachen an und sucht, dieselben zu
 tern. Allein sein ziemlich oberflächliches Mei-
 nent ist nicht geeignet, die Schwierigkeiten
 ben, vielmehr kommt er auf Seite 496, Zeile 14

4
zu der Behauptung:

„dass das Geschoss links abweichen müsse, wenn die
„vordere Fläche desselben sich von links nach rechts
„dreht, und umgekehrt,“

und kommt hierdurch mit den Thatfachen selbst, wie
sie sich in neuester Zeit herausgestellt haben, in di-
recten Widerspruch.

Einer eigentlichen Reibung des Geschosses an den Luft-
partikelchen und der Möglichkeit einer daraus folgen-
den Ablenkung erwähnt Lombard gar nicht und Eu-
er auf Seite 498 nur in der Weise, dass er sie, jedoch
ohne weiteren Nachweis für ganz unerheblich erklärt.

10. Erst 1794 wurde der in Rede stehende Gegenstand
übermals einer Untersuchung unterworfen, und zwar
auf Veranlassung einer Preisfrage, welche die König-
liche Akademie der Wissenschaften zu Berlin gestellt
hatte. Der Preis wurde einer Abhandlung zugesprochen,
welche den Titel führt:

„Über die Abweichung geworfener Körper von der
„vertikalen Richtungsebene – von Mohde, König-
„lich Preussischem Lieutenant von der Armee.
„Berlin 1795.“

und in welcher der Verfasser die mehrbesprochene Ab-

ng aus der Treibkraft des brennenden Lündersatzes
 tern will. Allein - wie auch die Akademie in ih-
 der Abhandlung vorgedrachten, Urtheile ausdrück-
 ausspricht - diese Erklärung ist gänzlich unge-
 nd, und namentlich deshalb, weil die in Rede
 zenden Ablenkungen auch bei solchen Geschossen
 haben, die gar nicht mit brennenden Lündern
 ren sind.

grösserem Interesse als diese missglückte Er-
 rungsweise ist folgende Stelle jener Abhandlung,
 wir hier wörtlich wiedergeben:

- Hat der Körper die Kugelgestalt, so mag der
 Mittelpunkt seines Volumens mit dem Schwer-
 punkte zusammenfallen oder nicht, nie wird der
 Widerstand der Luft etwas dazu beitragen könn-
 en, den Schwerpunkt von der verticalen Rich-
 tungsebene abzulenken. Denn es sei (man sehe
 Figur 1.) e der Mittelpunkt, und der Schwerpunkt Fig: 1.
 beschreibe jede beliebige krumme Linie; zugleich
 circouettire die Kugel um C , wie man nur wolle.
 Am Ende der Zeit t sei cf eine Tangente des Ele-
 ments der krummen Linie, das der Schwerpunkt
 in der Zeit dt zurücklegt. Man lege durch den
 Mittelpunkt e eine Ebene mn auf cf senkrecht:
 stösst in diesem Augenblick die Luft auf jedes

Element p der vorderen Fläche nach der Richtung kp pa-
 rallel mit fc . Denn wenn sich die Kugel während des
 Zeittheilchens dt nicht um C drehet, so ist der Satz für
 sich klar; drehet sie sich aber, so sei der Winkel, den pk
 mit dem Elemente p am Ende der Zeit t macht, $=$
 q ; wegen der Rotation während des Zeittheilchens
 dt wird sich q in $q \pm dq$ verwandeln. Wenn man also
 vorher $\sin q$ schrieb, so muß man jetzt $\sin(q \pm dq)$
 schreiben. Es ist aber offenbar $\sin(q \pm dq) = \sin q$; und
 an den Stellen gegen m und n zu, wo q unendlich
 klein ist, wird $\sin(q \pm dq) = dq \pm dq$ und $\sin(q \pm dq)^2$
 $= 2dq^2 \pm 2dq^2$, welches bekanntlich nachher bei der Sum-
 mirung von selbst wegfällt, so dass also die rota-
 tion während des Zeittheilchens dt gar keinen Ein-
 fluss auf die Richtung des Luftstosses hat. Die
 Kugel mag sich also drehen oder nicht, so geschehen
 die Stösse auf alle Elemente der vorderen Fläche pa-
 rallel mit cf . Die bisherigen Schlüsse gelten offen-
 bar nicht bloss für die Kugelfläche, sondern für
 jede Gestalt der Oberfläche. Nur von nun an, wenn
 man ferner die aus allen Elementarkräften resul-
 tirende Kraft des Widerstandes und die Richtung
 dieser Resultante gehörig sucht, da erhellet aus dem
 alten Satze von Zerlegung und Zusammensetzung
 der Kräfte, dass bei der Kugelgestalt 1, die Result-

17

stante durch einen Punkt r gehen muss, so dass
 $rm = rn$; 2, dass die Richtung dieser Resultante
perpendicularär auf das Element r und folglich
durch e parallel mit cf gehen muss; woraus
also keine Seitenkraft entstehen kann, die auf
 cf perpendicularär wäre. Alles also, was bei der
Kugelgestalt aus der Entfernung ke in Bezug
auf den Widerstand der Luft entstehen kann,
besteht bloss in Störungen der Rotation
um C , aber nicht in Ablenkung des Schwer-
punktes C von seiner Bahn, deren zweite oder
dritte (?!) Krümmung nur andere solliciti-
rende Kräfte zu Stande bringen. — — —
e Stelle, (die einzige, welche einigermaßen auf
Beantwortung der eigentlichen Hauptfrage
geht,) enthält die Behauptung, dass bei vollkom-
mer Kugelgestalt das Nichtzusammenfallen des
Schwerpunktes mit dem Mittelpunkt eine Ablen-
g des Geschosses aus seiner Bahn hervorzubrin-
gen nicht im Stande sey. Lassen wir es noch da-
stellen, in wiefern diese Behauptung an sich be-
ruht ist oder nicht, so leuchtet wenigstens sehr
ein, dass die hier versuchte Beweisführung
fehlerhaft ist und den Nerv der Sache gar
nicht trifft.

Der Beweis sucht darzuthun, dass für jedes einzelne Element der Kugeloberfläche der Winkel, unter welchem dasselbe während seiner Bewegung von der Luft getroffen wird, von dem gegenwärtigen Zeitpunkt an und während des nächsten unendlich-klein gedachten Zeittheils sich nur um unendlich wenig ändert, und da dies für jedes Element der Oberfläche der Fall ist, so wird daraus gefolgert, dass die Rotation gar keinen Einfluss auf die Richtung des Luftstosses hat.

Dies ist in zweifacher Beziehung eine falsche Auffassungsweise.

Erstlich muss, um den Einfluss der Rotation zu ermitteln, schon für den in Betrachtung gezogenen Zeitpunkt ausser der fortschreitenden Bewegung des Elements p nach der Richtung ph auch dessen Umdrehungsbewegung um C nach der Richtung pp' dergestalt beachtet werden, dass man aus der fortschreitenden Geschwindigkeit und der Umdrehungsgeschwindigkeit, welche bezügliche durch ph und pp' nach Richtung und Grösse dargestellt sein mögen, das Parallelogramm der Geschwindigkeiten construirt, um in der Diagonale pk' diejenige Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung zu erhalten, welche das Element p vermöge der beiden

gleicher Zeit bestehenden Bewegungen in diesem Augenblicke wirklich hat. Der Luftwiderstand, welcher das Element p nunmehr in der Richtung $h'p$ weicht, lässt sich in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine normal auf das Element p wirkt, die andre aber in die Tangente für p fällt und ausser Achtung bleibt. Die auf p normale Kraft kann man sodann parallel zu sich selbst nach dem Schwerpunkt rücken und dort in zwei andere zerlegen, deren die eine parallel mit der ursprünglichen Richtung ph ist, die andere aber senkrecht darauf. Diese letztere, aber diese auch gewiss, wirkt auf die Ablenkung des Schwerpunktes aus seiner ursprünglichen Richtung. Ob eine solche Statt findet, nicht, hängt von dem Gesamtergebnisse (dem Integral) aller der ablenkenden Kräfte ab, welche mittheilen Elementen der Kugeloberfläche entsprechen, und namentlich davon, ob die Summe aller wirkenden Theilkräfte nach der einen Richtung Summe der ablenkenden Theilkräfte nach der entgegengesetzten Richtung genau gleich ist, oder ob für der beiden Richtungen ein Überschuss bleibt. Ist ein solcher, so bildet er die ablenkende Kraft dieses Augenblicks.

Will man sodann zweitens die Änderungen betrach-

0
n, wie sie nach einem unendlich kleinen Zeittheil
tatt gefunden haben, so werden sie der Natur der Sache
nach ebenfalls nur unendlich klein sein, aber sie wer-
den deshalb keineswegs vernachlässigt werden dür-
fen. Vielmehr bilden die Ausdrücke für die Natur
dieser unendlich kleinen Änderungen das Material,
aus welchem durch Integration die Gesetze hervorge-
hen, nach welchen für gegebene endliche Zeiten die
Zahlenwerthe der zugehörigen endlichen Änderungen
gefunden werden.

Die hier besprochene Abhandlung hat also für
den in Rede stehenden Zweck gar nichts geleistet,
vielmehr ist das eigentliche Sachverhältniss gar nicht
erkannt worden.

11. Geklers physikalisches Wörterbuch spricht sich
in dem Artikel: „Ballistik“ Seite 723 u. f. über
unsern Gegenstand folgendergestalt aus:

„Um die Sache deutlicher zu machen, wollen wir an-
nehmen, die Kugel c bewege sich in der Rich-
tung ec , und rotire in der durch den Pfeil an-
gedeuteten. Je nachdem ihre Bewegung schnell-
er ist, wird die Luft vor ihr mehr verdichtet und
in gleichem Maasse hinter ihr verdünnt sein.

„ Die Rechnung ergibt, dass die Luft unter dem mitt-
 „ leren atmosphärischen Luftdrucke mit einer Ge-
 „ schwindigkeit von etwa 1220 Fuss in den leeren
 „ Raum eindringt. Ist daher die Bewegung der
 „ Kugel schneller, so wird der Raum hinter der-
 „ selben ein Vacuum sein; auf allen Fall aber
 „ ist, wie die Zeichnung andeutet, die Luft bei
 „ α und β am dünnsten, zwischen ϵ und δ am dick-
 „ ster. Indem nun die in der angegebenen Rich-
 „ tung rotirende Kugel aus dem Vacuum bei α in
 „ die bis ϵ an Dichtigkeit zunehmende Luft tritt,
 „ gegen letztere aber an jedem Punkte ihrer Ober-
 „ fläche in der Richtung der Tangente ihrer Mo-
 „ tation stösst, der hierdurch erzeugte Widerstand
 „ aber bei α im Minimum, bei ϵ im Maximum
 „ statt findet, so muss sie mit einer ihrer Ge-
 „ schwindigkeit proportionalen Kraft nach der
 „ entgegengesetzten Seite abgelenkt und also nach
 „ δ hin seitwärts bewegt werden. Es leuchtet ü-
 „ brigen von selbst ein, dass die Kugelbahn in
 „ dieser genannten Beziehung sowohl seitwärts
 „ als aufwärts und abwärts gekrümmt sein
 „ kann, jederzeit in einer, ihrer Rotation entge-
 „ gegengesetzten Richtung.“
 oberflächlich diese Darstellung ist, bedarf keiner

Andeutung; wie illusorisch sie aber ist, diess wird späterhin klar werden.

12. Ein allgemein geschätzter (inzwischen verstor-
bener) Officier der Preussischen Artillerie hat es im
Jahre 1830 in einer nicht öffentlich bekannt ge-
wordenen Abhandlung versucht, etwas gründlicher
zu Werke zu gehen und wenigstens einen Begriff
von dem Gergange bei einer durch die Umdrehung
des Geschosses erzeugten Ablenkung desselben zu ge-
ben und verfährt dabei in folgender Weise.

Um die Untersuchung zu vereinfachen, wird von
der Kugel abstrahirt und nur die Bewegung einer cy-
lindrischen Scheibe ohne Schwere betrachtet, die sich
in Folge eines ursprünglichen Stosses so bewegt, dass
die eine kreisförmige Grundfläche derselben, nemlich
MMMPSt. immer in einer und derselben Ebene,
etwa der des Papiers bleibt. Es wird angenommen,
dass der Schwerpunkt G dieser Scheibe nicht mit ih-
rem Mittelpunkt C zusammenfällt und dass ausser
der fortschreitenden Bewegung nach der Richtung
PQ noch eine Umdrehungsbewegung um C statt
findet, deren Richtung der Pfeil bei M andeutet, so
dass die vordere Hälfte der Scheibe sich von links

rechts dreht. Sodann wird jedes Element M der räumlichen Mantelfläche der Scheibe einem Luftwiderstand erliegen, dessen Wirkung zu ermitteln ist, um demnächst für denjenigen Theil der Mantelfläche, welcher überhaupt dem Luftwiderstande ausgesetzt ist, die gehörige Ausdehnung zu summieren, (integrieren) und so das Gesamtergebnis kennen zu lernen.

Als fernere Vereinfachung wird noch angenommen, nur der Verlauf einer einzigen ganzen Umdrehung betrachtet wird und dass während derselben fortschreitende Geschwindigkeit und der Luftwiderstand constant, auch die Luftvertheilung um den Rand der Scheibe herum genau dieselbe bleibe.

Es ist klar, dass während des Vorstehens der Scheibe nach der Richtung PQ die Luft vor der vorderen Fläche sich aufhäuft, so dass ihre Dichtigkeit am grössten ist, von da ab aber auf beiden Seiten dergestalt symmetrisch abnimmt, dass sie eine Function des Winkels ist, den der zu dem gerade gerichteten Punkt M gehörige Halbmesser CM mit dem Halbmesser CP einschliesst. Werden nun Winkel, welche die den beliebigen Punkten zugehörigen Halbmesser mit dem Halbmesser CP einschliessen, mit Δ bezeichnet und drückt die Function

$$f(\Delta)$$

die dem Punkte M entsprechende Dichtigkeit der Luft aus, so hat man, da die Winkel Δ , wenn sie von CP aus nach der einen Richtung hin als positiv angesehen werden, nach der andern Richtung hin als negativ betrachtet werden müssen, und da die Dichtigkeit der Luft für zwei verschiedene Punkte M , welche auf verschiedenen Seiten von CP , aber um den gleichen Winkel Δ entfernt liegen, gleich ist, zunächst

$$f(\Delta) = f(-\Delta),$$

und da ferner der Punkt, welcher dem Winkel Δ entspricht, derselbe ist, welcher zu dem Winkel $2\pi + \Delta$ gehört, so hat man auch

$$f(\Delta) = f(2\pi + \Delta).$$

13. Bezeichnet nun w die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Scheibe um ihren Schwerpunkt G dreht und Mm ein unendlich kleines Element des Scheibenrandes, so hat dasselbe vermöge der Umdrehung die Geschwindigkeit $w \cdot MG$ und dringt mit dieser in der auf dem Radius MG senkrechten Richtung MN gegen die Luft an, deren Dichtigkeit hier $f(BCM)$ ist. Setzt man nun den Luftwiderstand proportional der Dichtigkeit der Luft und dem Quadrat der Geschwindigkeit, so ist der Luftwiderstand, den das Flächenelement Mm in der Richtung MC erleidet, bekannt-

proportional dem Ausdruck

$\omega^2 \cdot MG^2 \cdot (\sin NMU)^2 \cdot f(PCM) \cdot Mm$,
 wenn MU eine Tangente für M ist. Nun ist
 $\angle NMU = \angle CMG$,

und ferner, wenn man $CM = r$, $\angle MCQ = \psi$ setzt,
 $Mm = r \cdot d\psi$.

Setzt man ferner $CQ = e$, so hat man in dem Dreieck
 MCQ $QM : e = \sin \psi : \sin CMQ$, mithin
 $MQ \cdot \sin CMQ = e \cdot \sin \psi$.

Bezeichnet man ferner den $\angle PCQ$ mit φ , so hat man
 $\angle PCM = \angle QCM - \angle PCQ = \psi - \varphi$,

und wenn man diess alles substituiert und
 den Luftwiderstand, den das Flächenelement
 Mm nach der auf dasselbe normalen Rich-
 tung MC erleidet, mit W bezeichnet,
 proportional dem Ausdrucke

$$r \cdot e^2 \cdot \omega^2 \cdot f(\psi - \varphi) \cdot \sin \psi^2 \cdot d\psi.$$

4. Verlegt man nun diese Kraft parallel zu sich
 nach dem Schwerpunkte, und zerlegt sie
 in zwei andere, von denen der Richtung PQ
 parallel ist, die andere aber senkrecht darauf steht,
 so ist nur diese letztere, deren Ausdruck

$$r \cdot e^2 \cdot \omega^2 \cdot f(\psi - \varphi) \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot \sin \psi^2 \cdot d\psi$$

im Stande, eine Ablenkung des Schwerpunktes
 seiner ursprünglichen Bahn hervorzubringen.

26.

Um das Gesamtergebnis aller ablenkenden Kräfte zu finden, muss man den Ausdruck für W am Ende der n ten für die ganze vordere Mantelfläche der Scheibe und zwar, wie leicht ersichtlich, in der Ausdehnung von $\psi = 0$ bis $\psi = \pi$ integrieren und hat dann für den gesamten Seitendruck nach der Richtung CD den Ausdruck

$$n \cdot e^2 \cdot \int_0^\pi \omega^2 \cdot f(\psi - \varphi) \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot \sin \psi^2 \cdot d\psi.$$

Dieser Seitendruck, welcher statt findet, während der Schwerpunkt G in einer Linie liegt, die mit CD den in der Richtung der Drehung gezählten $\angle \varphi$ bildet, treibt den Schwerpunkt der Scheibe in dem Zeittheilchen dt und in der Richtung CD zur Seite um die Strecke

$$\frac{n \cdot e^2 \cdot dt}{M} \cdot \int_0^\pi \omega^2 \cdot f(\psi - \varphi) \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot \sin \psi^2 \cdot d\psi$$

wo M die Masse der Scheibe bezeichnet. Da man nun Mehruß weiterer Vereinfachung annehmen kann, dass die während einer ganzen Umdrehung von dem Schwerpunkte durchlaufene Strecke von einer geraden Linie nicht sehr abweicht, so ist es gestattet, den während einer ganzen Umdrehung in der Richtung CD zur Seite beschriebenen Weg als die Summe aller jener, während der auf einander folgenden unendlich kleinen Zeittheilchen einer ganzen Umdrehung zurückgelegten, Strecken anzusehen,

habe einen irgend fühlbaren Irrthum befürchten zu müssen. Nun hat man bekanntlich

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \text{ mithin } dt = \frac{d\varphi}{\omega}.$$

Substituiert man dies in dem zuletzt gefundenen Ausdruck, und integriert sodann in Beziehung auf φ für eine volle Umdrehung, indem man als Grenzen für φ irgend einen beliebigen Anfangswert und $2\pi + \beta$ nimmt, so erhält man für den vom Schwerpunkt während einer ganzen Umdrehung in der Richtung $\vec{CD}$ zur Seite durchlaufenen Weg den Ausdruck

$$\frac{r \cdot e^2}{M} \cdot \int_{\beta}^{2\pi + \beta} \omega \cdot d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} f(\psi - \varphi) \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot \sin \psi^2 \cdot d\psi \dots \dots (a)$$

Setzt man sich nun die Winkelgeschwindigkeit zunächst als constant und hebt man aus dem Ausdruck (a) das Integral nach φ , nemlich

$$\int_{\beta}^{2\pi + \beta} f(\psi - \varphi) \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot d\varphi \dots \dots \dots (b)$$

aus, so kann man hierin $\psi - \varphi = -s$, oder $s = \varphi - \psi$ setzen. Da nun die Grenzwerte für φ nach dem vorigen β und $2\pi + \beta$ sind, so sind dann die Grenzwerte für s diese: $s = \beta - \psi$ und $s = 2\pi + \beta - \psi$. Da β ganz beliebig ist, so kann man auch $\beta = \psi$ setzen, dann sind für s die Grenzwerte die

nachstehenden, nemlich $s=0$ und $s=2\pi$. Endlich ist nach Seite 24, $f(-s) = f(s)$ und $\sin(-s) = -\sin s$, folglich, wenn man diess alles in (b) substituiert, der daraus entstehende Ausdruck dieser

$$-\int_0^{2\pi} f(s) \cdot \sin s \cdot ds.$$

Diess Integral nimmt aber unter allen Umständen den Werth Null an, weil sein Element für je zwei Werthe von s , die von π oberhalb und unterhalb gleich weit abliegen, gleiche und entgegengesetzte Werthe erhält. Denn für $s = \pi - \lambda$ wird jenes Element

$$\sin(\pi - \lambda) \cdot f(\pi - \lambda).$$

Dagegen für $s = \pi + \lambda$ wird es $\sin(\pi + \lambda) \cdot f(\pi + \lambda)$.

Es ist aber $\sin(\pi + \lambda) = -\sin(\pi - \lambda)$ und $f(\pi + \lambda) = f(\pi - \lambda)$, wie aus der Natur der Function f leicht erhellt, folglich erhält man

$$-\sin(\pi - \lambda) \cdot f(\pi - \lambda)$$

dem vorigen gleich aber entgegengesetzt.

Hieraus folgt, dass bei einer constanten Winkelgeschwindigkeit keine andauernde Seitenbewegung stattfinden kann.

15. Die Winkelgeschwindigkeit ist aber nicht constant. Bezeichnet R die Größe des Luftwiderstandes gegen die ganze Scheibe, welcher für die geringe Dauer einer ganzen Umdrehung als unverän-

richtig gedacht werden kann, so ist das Moment dieser Kraft in Bezug auf den Schwerpunkt dargestellt durch $\pi \cdot e \cdot \sin \varphi$. Bezeichnet sodann k das Trägheitsmoment in Bezug auf den Schwerpunkt, so bekanntlich $k \cdot d\omega = -\pi \cdot e \cdot \sin \varphi \cdot dt$, oder, $d\varphi = \omega \cdot dt$, $k \cdot \omega \cdot d\omega = -\pi \cdot e \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$ und daraus durch Integration

$$k \cdot \omega^2 = C + 2\pi \cdot e \cdot \cos \varphi$$

C eine noch näher zu bestimmende Constante stellt, nemlich den Ausdruck $k\omega_1^2$, wo ω_1 die Winkelgeschwindigkeit für $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ bedeutet. Man hat dann

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \frac{2\pi \cdot e \cdot \cos \varphi}{k}$$

und sodann mit einer für die Artilleriepraxis hinreichenden Genauigkeit unter Vernachlässigung übrigen Glieder

$$\omega = \omega_1 + \frac{\pi \cdot e \cdot \cos \varphi}{k \cdot \omega_1}$$

Setzt man nun diesen Werth von ω in den Ausdruck, Seite 27, so erhält man zwei Theile, einen, in welchem das constante ω_1 statt ω , und einen zweiten, in welchem

$$\frac{\pi \cdot e \cdot \cos \varphi}{k \cdot \omega_1}$$

an die Stelle von ω zu stehen kommt.

Der erste Theil kann ganz ausser Acht gelassen werden, weil so eben gezeigt worden ist, dass wegen des constanten w , sein Integral immer Null ist. Der zweite Theil ist

$$\frac{\pi \cdot r \cdot e^3}{M \cdot h \cdot \omega} \cdot \int_{\beta}^{2\pi+\beta} \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot \int_0^{\pi} f(\psi - \varphi) \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot \sin \psi^2 \cdot d\psi \dots (c)$$

Man hebe nun wieder das auf die Grösse φ sich beziehende Integral heraus, nemlich

$$\int_{\beta}^{2\pi+\beta} \cos \varphi \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot f(\psi - \varphi) \cdot d\varphi \dots \dots \dots (d)$$

und setze wieder, wie vorher $\psi - \varphi = -s$, so geht der Ausdruck (d), wenn man die Grenzen für s , wie auf Seite 27 bestimmt, auch $\beta = \psi$ setzt, über in

$$-\int_0^{2\pi} \cos(s + \psi) \cdot \sin s \cdot f(s) \cdot ds \dots \dots \dots (e)$$

Es wird nun in der Abhandlung nachgewiesen (welchen Nachweis wir als eine reine Sache des Calculs hier übergehen), dass der Ausdruck (e) mittelst Veränderung der Grenzen des Integrals in diesen andern umgeformt werden kann,

$$\int_0^{\pi} [\cos(\psi - s) - \cos(\psi + s)] \cdot \sin s \cdot f(s) \cdot ds$$

welcher sofort in

$$2 \sin \psi \cdot \int_0^{\pi} (\sin s)^2 \cdot f(s) \cdot ds \dots \dots \dots (f)$$

erget. Da nun für alle Werthe von φ das unter
 dem Integralzeichen stehende Element $(\sin \varphi)^2 \cdot f(\varphi)$ un-
 gesetzt nur positive Werthe einnimmt, indem je-
 seiner beiden Factoren stets und wesentlich positiv
 ist, so ist auch das Integral (f) ein zwar von der Na-
 der Function f abhängiger, aber wesentlich po-
 siver und im Umfange einer ganzen Umdrehung
 constanter Werth. Bezeichnet man diesen Werth
 mit P_0 und bringt man den Werth

$$2P_0 \sin \varphi$$

in den Ausdruck (f) alsdann annimmt, statt
 herausgehobenen Integrals (d) in den Ausdruck
 zurück, so wird derselbe jetzt

$$\frac{2re^3AB}{Mkw} \cdot \int_0^\pi (\sin \varphi)^3 \cdot d\varphi$$

wenn wir für das angezeigte bestimmte Inte-
 seinem Werth $\frac{4}{3}$ setzen:

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{re^3AB}{Mkw} \dots \dots \dots (g)$$

aber r, e, A, B, M, k, w , lauter wesentlich po-
 sive Grössen sind, so folgt aus der Natur des Aus-
 drucks (c) , welcher dem (g) gleich ist:

dass die eben untersuchte Ungleichförmigkeit
 in der Winkelgeschwindigkeit in der That eine
 fortdauernde Seitenbewegung in der Richtung

„ CD, das heisst, nach derselben Seite hin, nach welcher die Drehung des vordersten Punktes P erfolgt, nach sich zieht, und da dieselben Bedingungen bei jeder folgenden Umdrehung immer wieder aufs Neue eintreten, so muss die hier gefundene Seitenabweichung, in Bezug auf die ursprüngliche Richtung des Wurfes, eine fort und fort beschleunigte werden.“

16. So weit der Auszug aus jener Abhandlung.

— Wir haben das Wesentlichste ihres Inhaltes mit einer solchen Ausführlichkeit wiedergegeben, weil sie die erste ist, in welcher das Bestreben sichtbar wird, mit einiger Gründlichkeit auf unsern Gegenstand einzugehen, und weil sie, wie wir mit Bestimmtheit wissen, unter der Mitwirkung und ausdrücklichen Zustimmung eines noch lebenden rühmlichst bekannten Mathematikers von Fach entstanden ist. Das Ergebnis jener Untersuchung stimmt auch in der Hauptsache mit dem überein, was die Erfahrung giebt.

Desto mehr ist es zu bedauern, dass diese ganze Untersuchung in Nichts zusammenfällt, weil — in einer für ihre Entstehung unbegreiflichen Weise — gleich im Anfange derselben ein wesentlicher Unachtsamkeitsfehler vorgefallen ist. Es ist nem-

der fortschreitenden Bewegung der ganzen Schei-
 nach der Richtung PQ am Ende der nro 12, Seite
 zwar gedacht worden, um die Verdichtung der
 vor der vordern Mantelhälfte der Scheibe zur
 brücke zu bringen und zu motiviren, bei der Be-
 mung der Richtung aber, in welcher der Luft-
 stand gegen das in Betracht gezogene Element
 wirkt, und bei der Bestimmung der Geschwin-
 keit, welche hierbei in Rechnung zu stellen ist,
 aber die fortschreitende Bewegung ganz unbe-
 achtet gelassen. Dies ist ein erheblicher
 Irrthum. Wie man aus der nro 13, Seite 24, er-
 t, wird das Element in seiner Umdrehungsbe-
 wegung um G betrachtet, sein (bloss) hieraus ent-
 stehendes Bestreben, sich nach der auf GM
 rechten Richtung MN zu bewegen, hervorgeho-
 und sodann (nur) der Luftwiderstand in Be-
 tracht gezogen, der dieser Geschwindigkeit (u. MG)
 Richtung und Grösse entspricht. Das Ele-
 ment Mn hat aber ausser der Bewegung, welche
 vermöge der Umdrehung um G nach der Rich-
 tung MN hat, gleichzeitig auch noch eine fort-
 schreitende Bewegung parallel zu PQ . Wird diese,
 durchaus nicht unterlassen werden darf, mit
 gezogen, so hat man, wie Seite 18 und 19 schon

bermerklich gemacht worden ist, das Parallelogramm der Geschwindigkeiten zu construiren, welches beiden genannten Bewegungen entspricht, und erhält sodann in der Diagonale des Parallelogramms diejenige Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung, welche das Element *Mm* wirklich hat. Stellt man nun diese Geschwindigkeit in Rechnung, um den Luftwiderstand nach Grösse und Richtung zu ermitteln, so bekommt die Untersuchung eine ganz andere Gestalt, und ergiebt auch ein ganz anderes Resultat, als das am Ende der nro 15 auf Seite 31 und 32, dessen zufällige Übereinstimmung mit den Erscheinungen der Wirklichkeit ein nur durchaus illusorischer Beweis für die Richtigkeit der Weges ist, auf welchem man dasselbe gefunden hat.

17. Der Zeitfolge nach ist hier eine fernere Stufung aufzunehmen, welche in das Jahr 1835 gehört und in folgendem Werke enthalten ist:

- „ Cours d'Artillerie. Partie théorique. par G. Robert, capitaine d'Artillerie. Rédigées d'après les Cahiers et les Leçons du Professeur en 1835. par M. M. Didion et de Sauloy, capitaines d'Artillerie. Paris. Avril 1841. „

die bezügliche Stelle befindet sich auf den Seiten
 VI und XVII der Einleitung und lautet folgender-
 art:

„ Les projectiles ordinaires, par la manière, dont ils
 „ sont lancés, ayant toujours un certain mouvement
 „ de rotation et frappant l'air dans ce mouvement,
 „ toute autre forme, que la forme sphérique, produi-
 „ roit de très grandes déviations; car les résistances
 „ partielles n'étant pas distribuées symétrique-
 „ ment autour de la direction du mouvement,
 „ n'auroient pas une résultante unique suivant
 „ cette ligne. Il en seroit de même de la forme
 „ sphérique, si le centre de gravité ne se confondoit
 „ pas avec le centre de figure; ces déviations ont
 „ lieu même pour une sphère parfaite douée d'un
 „ mouvement de rotation; l'expérience le montre
 „ et il est aisé de s'en rendre compte. En effet,
 „ si la sphère, outre son mouvement en avant, a
 „ aussi un mouvement de rotation, que nous sup-
 „ poserons pour plus de facilité avoir lieu autour
 „ d'un axe vertical, les portions situées à droite
 „ marchant en avant, dans le même sens que le
 „ centre de gravité, le frottement de cette portion
 „ du corps contre les couches d'air qui doivent
 „ passer de l'avant à l'arrière, rendra le passage

„ plus difficile que si le mouvement n'avoit pas lieu,
 „ il augmentera par conséquent la densité et la
 „ pression latérale des couches de ce côté; le contrai-
 „ re aura lieu du côté opposé, ou le mouvement de
 „ rotation du projectile facilitera l'écoulement;
 „ par cette double raison la somme des pressions
 „ latérales de la droite l'emportera sur celle de la
 „ gauche et le projectile sera par conséquent con-
 „ tinuellement pressé vers la gauche et deviera de
 „ ce dernier côté.

„ D'une autre part, la pression de l'air sur la
 „ partie antérieure produira un frottement, qui
 „ agira de gauche à droite et fera devier le pro-
 „ jectile dans ce sens. Il résulte de là deux effets
 „ différents et dont l'intensité respective variant
 „ avec la vitesse produit une déviation irrégulière
 „ d'abord dans un sens, puis dans l'autre..

Diess ist Alles. Bei der Allgemeinheit, in der es
 ausgesprochen ist, lässt sich schwer etwas darüber
 sagen. Es ist zu bedauern, dass der Verfasser nicht
 ausführlicher auf den Gegenstand eingegangen
 ist

37

„Preussischen Artillerie- und Ingenieur- Corps.“
Mand, Seite 33 befindet sich ein Aufsatz vom
Verfasser der vorliegenden Arbeit, welcher einen
auch enthält, den Einfluss der Luft- Reibung,
fern eine solche existirt, auf die Bahn solcher
Artillerieprojectile zu erörtern, welche unter flachen
Schusswinkeln abgeschossen werden. Es ist da-
in Luftwiderstandsgesetz von zweigliedriger
angenommen worden, wie es Euler in seinen
Bemerkungen zum Robins-son'schen Werke (Seite
u. f. der Lombardschen Übersetzung) vorschlägt,
es sind zur Bestimmung der darin vorkom-
enden constanten Factoren die Ergebnisse der Kugeln-
versuche am ballistischen Pendel benutzt.
Hinsichtlich der Luftreibung selbst ist als Hypothese
angenommen, dass sie eine Kraft ergebe, deren In-
tensität dem jedesmaligen Luftwiderstande propor-
tional sei, so dass man den Ausdruck für letzteren
mit einem (für jedes Geschoss und jede Ladung
Versuche näher zu bestimmenden) constanten-
factor zu multipliciren hätte, um den Aus-
druck für jene zu erhalten. Diese Kraft ist so-
als normal auf die Drehachse und auf die
Tangente der Bahn wirkend in Rechnung ge-
nommen. Der Berechnung und weiteren Anwendung

der so gefundenen Formeln würde jedenfalls noch eine Untersuchung und Erwägung darüber haben vorausgehen müssen:

- „ ob die Luftreibung auch wirklich der Grund für
- „ die beobachteten Ablenkungen ist, oder ob und
- „ wie viel von letzteren noch auf Mechanismen an-
- „ deren Ursachen zu setzen ist. „

Die Prüfung der Zulässigkeit der für das Gesetz der Luftreibung angenommenen Hypothese würde, wenn jener Präliminarpunkt vorher erledigt wäre, leicht durch Versuche erfolgen.

Eine Aufklärung darüber, welches die eigentliche Ursache der Ablenkungen sei, kann der vorbezeichnete Aufsatz unter diesen Umständen selbstredend nicht geben.

19. In demselben vorerwähnten „Archiv“ und zwar im sechsten Bande, Seite 213 befindet sich ein Aufsatz, welcher den Titel führt:

- „ Die Elemente der Fortbewegung und Rotation
- „ der Körper von beliebiger Form und Dichtig-
- „ keit im flüssigen Mittel. (Theorie des Schie-
- „ ssens und Werfers.) Vom Seconde „ Lieute-
- „ nant Neumann I in der 6ten Artilleriebrigade.

ad in dem vierzehnten Bande, Seite 49 ein zweiter
 Aufsatz von demselben Verfasser mit der Überschrift
 „Das ballistische Problem.“

Diesen beiden Aufsätzen hat sich der Herr Ver-
 fasser die directe Aufgabe gestellt, den eigentli-
 chen physikalischen Grund der mehrbesprochenen
 Lenkung der Artilleriegeschosse aufzudecken, die
 Art und Weise, in welcher die Umdrehung der Ge-
 schosse hierauf einwirkt, darzulegen und demnächst
 die Auflösung des ballistischen Problems in sol-
 chen Differenzialgleichungen zu geben, welche
 jenen Umstand Rücksicht nehmen. Es
 geht dabei von der Voraussetzung aus, dass das
 Geschoss (Geschoss) vollkommene Kugel-
 form habe, dass aber Schwerpunkt und Mittel-
 punkt nicht zusammenfallen, und es sind dann
 wesentlich in dem letzteren Aufsätze folgende
 Sätze aufgestellt:

Seite 51 Zeile 13 von unten. „Die jedesmalige
 Flugrichtung ist in dem betreffenden Punkte
 die Tangente an die Bahn, und diese theilt
 die Umdrehung in zwei Hälften, in deren ei-
 ner die Drehung um den Mittelpunkt, und
 in deren anderer um den Schwerpunkt vor-
 sich geht. Dreht sich die vordere Fläche von

„oben nach unten, so ist stets in der unteren
 „Hälfte der Umdrehung die Fliehkraft thätig
 „und in der oberen erloschen, und bei umge-
 „kehrter Drehung umgekehrt.“

ferner Seite 50, Zeile 6 von unten: „Hiebei ist die
 „Vorstellung fest zu halten, dass das in seinem
 „Mittelpunkte und Schwerpunkt von Kräften
 „angegriffene Geschoss sich entweder nur um
 „seinen Schwerpunkt oder nur um seinen
 „Mittelpunkt in der That drehen kann, dass
 „in Hinsicht auf Drehung der Drehpunkt
 „als ruhend anzusehen ist.“

ferner Seite 51, Zeile 3: „Andere Vorstellungen ü-
 „ber den Drehpunkt des Geschosses, über dessen
 „Übergehen aus dem Schwerpunkt in den Mit-
 „telpunkt und umgekehrt und über die hier-
 „aus folgende Einwirkung der Rotation auf die
 „Fortbewegung vermöge der Fliehkraft schlie-
 „ßen das Bestehen des Gleichgewichts zwischen
 „Wirkung und Gegenwirkung aus.“

Das Wesentliche in dieser Vorstellungsweise führt
 sich also auf die zwei Behauptungen zurück:

a, dass während eines Theils der Umdrehungsbe-
 wegung der Mittelpunkt des Geschosses als
 Drehpunkt angesehen werden müsse und kein

anderer Punkt des Geschosses während dieser Zeit als Drehpunkt angesehen werden dürfe, und b, dass während dieser Zeit die Centrifugalkräfte im Bezug auf den Mittelpunkt, welche während der Umdrehung um diesen als thätig gedacht werden müssen, den Grund der Einwirkung der Umdrehungsbewegung der Geschosse auf deren Bahn abgebe.

Die 59 u. f. des letzteren der beiden Aufsätze werden nur für einige in der Praxis besonders interessante Fälle die Differenzialgleichungen, welche die Natur der aus jenen Ansichten hervorgehenden Bewegung ausdrücken sollen, gegeben und auf Seite nachmentlich für den speciellen Fall aufgestellt, in Schwerpunkt und Mittelpunkt zugleich in verticalen Richtungsebene des ursprünglichen Geschosses, jedoch nicht in dessen Richtung gleichsam liegen, eine Umdrehung mithin zwar erfolgt, nicht ein Seitwärtsausweichen des Geschosses, sondern nur eine Modification in der Schussweite hervorbringen kann.

Diese sämtlichen Gleichungen sind indessen vollständig unrichtig und zwar ist hiemit nicht die bekannte Unrichtigkeit gemeint, wie sie aus der Seite 61 jenes ^{Auf} Satzes in der nro 7 als Nothbehelf

für die Herbeiführung der Continuität aufgenommenen Ausgleichung entspringt, sondern es ist eine Unrichtigkeit im Princip, welche darin ihren Grund hat, dass die aufgestellten Vordersätze direct gegen die allerersten und allgemein anerkannten Grundlehren der höhern Mechanik verstossen.

Dieser zufolge ist bei der Betrachtung der freien Bewegung eines festen Körpers (von der hier nur die Rede ist) die Wahl desjenigen Punktes, welchen man als Drehpunkt betrachten will, bekanntlich durchaus beliebig und man kann daher die Wahl so treffen, wie anderweite Rücksichten, etwa die Bequemlichkeit der Rechnung, die Anleitung dazu geben. Es ist bekannt, dass und warum man in der Regel hierbei den Schwerpunkt des Körpers allen andern Punkten desselben vorzieht. Einer besondern Erwähnung ist jedoch der folgende Umstand werth, weil er sich auf das Resultat der in Rede stehenden Arbeit direct bezieht.

Jede mögliche Drehung eines Körpers muss in jedem einzelnen bestimmten Zeitpunkte als um eine in jeder Beziehung bestimmte Drehachse erfolgend gedacht werden, insofern man sich die möglichst einfachste Vorstellung von ihr machen will. Sie kann dagegen auch als in drei andere zerlegt ge-

icht werden, um Drehachsen, welche durch den
 ursprünglich angenommenen Drehpunkt nach ganz
 beliebigen Richtungen gelegt worden sind, dergestalt,
 dass der Effect dieser drei gleichzeitigen Drehungen
 genau derselbe ist, wie der der ursprünglichen einfachen
 Umdrehung um die gegebene eine ursprüngliche Dreh-
 achse. Im Allgemeinen wird man sodann auf die
 Centrifugalkräfte Rücksicht nehmen müssen, welche
 Bezug auf jede der drei gewählten Achsen durch
 Umdrehung hervorgerufen werden. Nun giebt
 aber in jedem Körper wenigstens drei gerade auf
 einander senkrecht stehende Linien, welche durch
 den Schwerpunkt gehen und Haupt-Drehachsen
 sind und welche unter andern Eigenschaften auch
 haben, dass, wenn Umdrehung um eine oder
 mehrere derselben zugleich stattfindet, die Centri-
 fugalkräfte, im Bezug auf jede dieser drei Achsen
 sich, sich vollständig aufheben und vernichten,
 dass also dann von Centrifugalkräften gar keine
 Rede ist. Wenn man mithin für die ganze Dauer
 der in Betrachtung gezogenen Bewegung den
 Schwerpunkt zum Mittelpunkt der Drehung wählt
 die in den einzelnen auf einander folgenden un-
 endlich kleinen Zeittheilen stattfindenden Um-
 drehungen um denselben immer in drei andere um

drei bestimmte Hauptdrehachsen zerlegt denkt, so giebt es gar keine Centrifugalkräfte, welche zu beachten wären und dieselben fallen aus der Betrachtung ganz heraus. Diese so wünschenswerthe Vereinfachung ist denn auch der Grund, warum man bei der Erörterung über die freie Bewegung eines festen Körpers die Drehungen immer auf den Schwerpunkt und auf drei durch denselben gehende Hauptdrehachsen bezogen denkt.

Wenn dessenungeachtet bei der in Mode stehenden Auflösung des genannten Problems Fliehkräfte eingemischt und als die wahre physikalische Ursache der Einwirkung der Umdrehung der Artilleriegeschosse auf deren Bahn bezeichnet werden, so entspringt diess bloss aus der irrthümlichen Ansicht, dass in gewissen Abschnitten der Bahn, kein anderer Punkt des Geschosses als dessen Mittelpunkt als Drehpunkt angesehen werden dürfe.

Lässt man, dem hier Gesagten gemäss, diejenigen Glieder der Differentialgleichungen auf Seite 62 jenes Aufsatzes, welche das Symbol P für die Einwirkung der Centrifugalkräfte enthalten, ausfallen, so behält man die gewöhnlichen Gleichungen für die Bewegung einer Kugel ohne Umdrehung.

Um die chronologische Reihenfolge festzuhalten, wolle der Verfasser der vorliegenden Arbeit nurmehr einem Aufsatze sprechen, welchen er selbst 1836 $\frac{1}{4}$ geschrieben hat und welcher 1840 gedruckt worden ist. jedoch bei der Besprechung dieses Aufsatzes Bezugnahme auf ein im Jahre 1839 erschienenenes Werk Herrn Poisson wird eintreten müssen, so möge nächst die Angabe und Erörterung des Inhaltes dieses letzteren Werkes folgen.

21. Der Titel desselben ist:

„recherches sur le mouvement des projectiles dans
 „l'air, en ayant égard à leur figure et leur
 „rotation, et à l'influence du mouvement
 „diurne de la terre; par Poisson. Paris 1839.“

Poisson stellt vier verschiedene Elemente als die möglichen Ursachen der Abweichungen Artilleriegeschosse, nemlich:

- a, die Umdrehung der Erde,
- b, die Umdrehung des Geschosses mit Rücksicht auf
 - a, eine etwaige Reibung an der Luft,
 - b, Unvollkommenheit der Kugelgestalt,
 - c, Nichtzusammen des Schwer- und Mittelpunktes bei vollkommener Kugelgestalt.

Aus demjenigen, was in den Nummern 1 bis 6 der Einleitung zu der vorliegenden Arbeit gesagt worden ist, leuchtet ein, dass für den hier vorwaltenden Zweck die Fälle A und B. b ausser Acht zu lassen sind und dass es sich nur um die Fälle B. a. und B. c. handelt. Auf diese wird sich daher die nachfolgende Mediation auch nur beziehen.

In einer Einleitung für die in Rede stehenden Untersuchungen sagt Herr Poisson Seite 73, Heile 4. zunächst Folgendes:

- „ lorsqu'un corps parfaitement sphérique et homo-
- „ gène est lancé sans aucune rotation initiale,
- „ dans un air calme, son centre de figure ne sort
- „ pas du plan vertical de sa projection, abstraction
- „ faite, toutefois, de la petite déviation due
- „ au mouvement de la terre, et que j'ai consi-
- „ dérée dans un autre mémoire. Tout, en effet,
- „ est semblable alors de part et d'autre de ce plan,
- „ mais dans la pratique de l'artillerie, le concours
- „ des circonstances qui produit cette similitude
- „ n'a jamais lieu, et il en résulte des écarts
- „ considérables du projectile, à droite ou à gauche
- „ du plan de projection, qui nuisent à la justesse
- „ du tir et n'ont pas marqué d'être observés. „

und indem er im fernern Verlaufe desselben Einlei-

44

ng einen allgemeinen Überblick der von ihm ge-
führten Untersuchungen und deren Resultate
abt, sagt er Seite 77, Zeile 18:

„néanmoins, d'après la composition de la formu-
„le qui exprime la déviation horizontale à la
„distance du canon où le boulet retombe sur le
„terrain, on reconnaît facilement que cette dé-
„viation ne peut jamais être qu'une très pe-
„tite fraction de la longueur de la portée; en
„sorte, que ce n'est pas au frottement de la
„surface du boulet contre la couche d'air adja-
„cente et d'inégale densité, que sont dues prin-
„cipalement les déviations observées.“

hiernach Herr Poisson das Vorkommen beträchtlicher
weichungen der Artilleriegeschosse in Folge deren Um-
kung als etwas wirklich Bestehendes und als
tsächlich anerkannt voraussetzt, von dem beiden
bei einzig und allein zur Sprache kommenden
enden den einer möglichen Luft-Freibung ab
^{aber}
a. (als unerheblich von der Hand weist, so be-
nimmt er damit implicite die Verpflichtung,
hzuweisen, dass der Umstand Pr. c. die wahre
anlassung sei.

Wenn übrigens Herr Poisson der Ansicht ist,
es bereits aus dem Überblick der von ihm be-

zeichneten Formel zu ersehen sei, dass eine etwaige Luft-Reibung die Ursache der Ablenkungen nicht sein könne, so müssen wir einen solchen Ausspruch als übereilt bezeichnen. Jene Formel enthält einen noch unbestimmten Factor, der sich auf die Intensität der Einwirkung der Luft-Reibung bezieht, und dessen Zahlenwerth durch praktische Versuche zu ermitteln sein würde. Den Ergebnissen einer solchen Versuchs durch einen Nachspruch vorzugreifen zu wollen, ist gewiss das Bedenklichste, was sich ein Physiker zu Schulden kommen lassen kann. Wir werden dies später noch mehr motiviren.

Obgleich wir aber mit dem von Herrn Poisson dargebotenen Grunde für seine Behauptung nicht einverstanden sein können, so sind wir es doch völlig mit letzterer selbst und zwar aus Gründen, welche sich auf Thatsachen stützen und welche wir später ebenfalls näher darlegen werden.

Unter diesen Umständen aber glauben wir mit gutem Tug uns von einer nähern Darlegung der Details der dazufälligen Untersuchung des Herrn Poisson entbinden zu dürfen, da wir durch dieselbe dem eigentlichen Zweck dieser Abhandlung nicht näher geführt werden.

Wir wenden uns vielmehr nun zu dem wichtigsten Punkte in dieser ganzen Angelegenheit, nemlich zu der Frage:

- " ob bei vollkommener äusserer Kugelgestalt des
- " Geschosses durch das Nichtzusammenfallen
- " des Schwerpunktes mit dem Mittelpunkt
- " und die daraus folgende Umdrehung des Ge-
- " schosses der Einfluss des Luftwiderstandes auf
- " das Geschoss (in dem gewöhnlichen Sinne ge-
- " nommen und von einer Reibung des Ge-
- " schosses an den Luftpartikelchen ganz abstra-
- " hirt) dergestalt modificirt werden könne, dass
- " daraus dauernde und ohne Erde wachsende
- " Ablenkungen des Geschosses aus derjenigen
- " Bahn erzeugt werden können, welche
- " ein völlig homogenes und concentrisches Ge-
- " schoss ohne Rotation beschrieben haben wür-
- " de?

wie endlich,

- " in wie fern Herr Poisson der indirect über-
 - " nommenen Verpflichtung, die Nothwendigkeit
 - " der Bejahung der vorstehenden Frage nach-
 - " zuweisen, nachgekommen sei?"
- werden uns darauf beschränken, die Resultate Poisson'schen Untersuchung herauszulegen,

und diese einer nähern Erörterung zu unterwerfen.

Es bezeichne

x, y, z ein rechtwinkliges Coordinatensystem für die Bahn des Schwerpunktes G des Projectils.

Der ursprüngliche Ort des Schwerpunktes sei der Anfang dieses Coordinatensystems,

x sei horizontal, positiv nach der Richtung des Schusses.

y ebenfalls horizontal, senkrecht auf der Achse der x ,

positiv nach links, negativ nach rechts,

z vertical, positiv nach oben.

Durch den Schwerpunkt des Körpers denke man sich drei Hauptdrehachsen ermittelt und nehme diese als die Coordinatenachsen für die verschiedenen Punkte des Körpers. Diese Coordinatenachsen sind fest im Körper, aber beweglich im Raume. Sie seien durch Gx_1, Gy_1, Gz_1 bezeichnet. Ist der Schwerpunkt G in einem beliebigen Punkte seiner Bahn angekommen, so denke man sich durch denselben drei neue Achsen gelegt, parallel zu den Achsen der x, y, z . Es sei nun GZ einer der beiden Theile der Durchschnittslinie der beweglichen Ebene der x, y mit der durch die letzteren x, y gelegten Horizontalebene und es sei sodann

$$\angle LGx = \psi, \quad \angle LGx_1 = \varphi, \quad \angle xGz_1 = \delta.$$

Von den beiden Theilen derjenigen geraden Linie, welche die Achse Gz_1 bildet, ist derjenige als die positive Seite zu betrachten, in Folge dessen der Winkel $\theta = \angle Gz_1$ um Maass des Winkels wird, welchen die Ebenen der Winkel ψ und φ mit einander einschliessen.

Sei ω die Winkelgeschwindigkeit, welche der Umdrehung um die augenblickliche Drehachse entspricht, und sei dieselbe in drei andere zerlegt für Umdrehungen, welche um die Hauptdrehachsen gedacht werden, dergestalt, dass man als Winkelgeschwindigkeiten erhalte

um die Achse Gx_1 , positiv für eine Umdrehung in der Richtung von Gy_1 nach Gz_1 .

um die Achse Gy_1 , positiv für eine Umdrehung in der Richtung von Gz_1 nach Gx_1 .

um die Achse Gz_1 , positiv für eine Umdrehung in der Richtung von Gy_1 nach Gx_1 .

Dann hat man bekanntlich

$$\left. \begin{aligned} p &= -\sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \cdot \frac{d\theta}{dt}, \\ q &= -\sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \cdot \frac{d\theta}{dt}, \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} - \cos\theta \cdot \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned} \right\} [1]$$

t die seit dem Beginn der Bewegung verfllossene Zeit bedeutet. Es bezeichne ferner

52.

den in der Zeit ^t (durchlaufenen) bogenförmigen Theil
der Bahn,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \theta \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi + \cos \psi \cdot \cos \varphi, \\ \beta &= \cos \theta \cdot \sin \psi \cdot \cos \varphi - \cos \psi \cdot \sin \varphi, \\ \alpha' &= \cos \theta \cdot \cos \psi \cdot \sin \varphi - \sin \psi \cdot \cos \varphi, \\ \beta' &= \cos \theta \cdot \cos \psi \cdot \cos \varphi + \sin \psi \cdot \sin \varphi, \\ \alpha'' &= \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ \beta'' &= \sin \theta \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \right\} [2]$$

l den Halbmesser des kugelförmigen Geschosses
e die reine Bruchzahl, welche man erhält, wenn
man die Entfernung zwischen Schwerpunkt und
Mittelpunkt (die Excentricität) durch den Halb-
messer des Geschosses dividirt, so dass

e.l die absolute Grösse dieser Excentricität ist.

D' die mittlere Dichtigkeit des Projectils,

D die mittlere Dichtigkeit der atmosphärischen
Luft im gewöhnlichen Zustande.

n eine durch Versuche zu ermittelnde Constante,
welche sich auf das Luftwiderstandsgesetz bezieht.

$$\lambda^2 = \frac{15 n \cdot D}{16 D' \cdot l^2}, \text{ eine Abkürzung,}$$

$$\mu = \frac{2 n \cdot D}{8 D' \cdot l} = \frac{2}{5} \lambda^2 \cdot l, \text{ dergleichen.}$$

g die Beschleunigung der Schwere = 31, 25 Fuss
Preussische Mass.

Als Resultat seiner Untersuchung findet Herr Poisson für ein genau kugelförmiges Geschoss die nachfolgenden Differentialgleichungen, welche die Natur der fortschreitenden Bewegung seines Schwerpunktes ausdrücken sollen:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} &= \frac{\varepsilon l^2}{5} \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d(p^2 + q^2)}{ds} - \varepsilon \mu l \cdot \frac{ds}{dt} (q \cdot \alpha - p \cdot \beta), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} &= \frac{\varepsilon l^2}{5} \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d(p^2 + q^2)}{ds} - \varepsilon \mu l \cdot \frac{ds}{dt} (q \cdot \alpha' - p \cdot \beta'), \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \mu \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + g &= \frac{\varepsilon l^2}{5} \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d(p^2 + q^2)}{ds} - \varepsilon \mu l \cdot \frac{ds}{dt} (q \cdot \alpha'' - p \cdot \beta'')\end{aligned}$$

... [3]

Zu diesen Gleichungen müßten noch die für p , q und r hinzutreten, um die Auflösung zu vervollständigen, wir bedürfen derselben jedoch für unsern Zweck nicht.

Es ist leicht einzusehen, dass die Integration dieser Differentialgleichungen, welche natürlich nur in seltenen Fällen erfolgen kann, im allgemeinsten Falle genommen, zu äußerst voluminösen und mühevollen Entwicklungen führen muss.

Herr Poisson übernimmt sie auch nicht, indem er diese Arbeit, die nur etwas Überlegung und Geduld erfordert, billig, derjenigen überlässt, welche ein besonderes Interesse daran haben, sie ausgeführt zu sehen. Gegenbehandelt er auf Seite 184 bis 202 die in

der Artillerie = Praxis besonders interessanten Fälle etwas näher, wo ein unter beliebiger Winkelserhöhung der Seelenachse des Geschützes abgeschossenes Geschoss sich um eine Drehachse dreht, welche durch den Schwerpunkt des Geschosses gehend

a, immer horizontal liegt und senkrecht auf der ursprünglichen verticalen Richtungsebene steht, und

b, wo sie von dieser Lage etwas, jedoch nur wenig abweicht.

Die Betrachtung des ersten Falles, wo auf beiden Seiten der verticalen Richtungsebene alles gleich und symmetrisch vorausgesetzt wird, führt zu einer Seitenabweichung des Geschosses also nicht vorhanden ist, ist bestimmt, den Einfluss der Umdrehung auf die Schussweiten, die Betrachtung des andern aber, den Einfluss der Umdrehung auf die Seitenabweichungen zu zeigen.

Für den ersten Fall gehen die Gleichungen [3] über in

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{2\epsilon l^2}{5} \cdot p \cdot \frac{dp}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} + \epsilon p l p \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \cos \delta,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \mu \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + g = \frac{2\epsilon l^2}{5} \cdot p \cdot \frac{dp}{ds} \cdot \frac{dz}{ds} + \epsilon p l p \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \sin \delta$$

... [4]

wozu dann noch

die Gleichungen für die Umdrehungsbewegung

$$\frac{dp}{dt} = \varepsilon \cdot \lambda^2 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \cdot \cos \theta + \frac{dz}{dt} \cdot \sin \theta \right), \text{ und } p = \frac{d\theta}{dt} \dots [s]$$

zutreten.

Bei dem Ausspruch des Endresultats geht Herr Poisson äusserst vorsichtig zu Werke, er sagt Seite 195, Zeile
 „l'influence de la rotation du projectile sur le
 „mouvement de translation est très petite et né-
 „gligeable dans le tir de la bombe“

er führt sodann ein Zahlenbeispiel an, in welchem
 annimmt, dass das Geschoss während einer Flug-
 t von 16 Sekunden Eine einzige Umdrehung ma-
 um hieran zu zeigen, dass in diesem Falle die
 drehung keinen merklichen Einfluss auf die
 usweite habe.

Dies ist ein mehr als sonderbarer Einfall. Herr
 son führt zuerst an, dass die Umdrehung
 trächtlichen „Einfluss äussere, erregt die Erwar-
 g, dass er nachweisen werde, in welcher Weise die
 drehung diesen Einfluss geltend macht, und
 rt sodann ein Beispiel an, in welchem der Ein-
 der Umdrehung „sehr klein“ ist „und ver-
 lässtigt werden darf.“ Gewiss hatte Herr Pois-
 das Recht, das Problem nur für einen speciel-
 Fall durchzuführen, wie z. B. in dem, welcher den

Gleichungen [4] und [5] entspricht, aber dann müsste die daraus entspringende Erleichterung des Calculs dazu benutzt werden, die ursprüngliche Behauptung nur um desto directer durchzuführen und ihre Wichtigkeit in diesem speciellen Falle um desto bestimmter nachzuweisen. Beachtet man jedoch näher, wie sehr auf den Seiten 190 bis 195 die Darstellung gewunden ist, so sieht man wohl ein, dass man auf diesem Wege zu dem gewünschten Ziele nicht gelangen konnte.

Herr Poisson hätte uns ein Beispiel vorführen sollen, bei welchem 30 - 40 Umdrehungen in einer Secunde statt hätten.

Für den zweiten Fall, wo nämlich die Drehachse nicht immer senkrecht auf der verticalen Mittlungebene bleibt, also auf eine Seitenabweichung gerechnet werden muss, findet Herr Poisson für das Maass dieser Seitenabweichung

$$y = \frac{\varepsilon \cdot l \cdot \eta}{a} \cdot (x - a \cdot t)$$

wo η die ursprüngliche Umdrehungsgeschwindigkeit und a die Anfangsgeschwindigkeit ist. Herr Poisson sagt hierüber Seite 201, letzte Zeile u. f.

„cette deviation aura lieu constamment d'un même côté de ce plan et ne atteindra pas de maximum.“

57.

Hier haben wir also endlich einen bestimmten Aus-
spruch. Die Seitenabweichung " n° atteindre pas
de maximum" d. h. sie wird ohne Ende wachsen.

22. Abgesehen davon, dass die Folgerungen, zu de-
ren Herr Poisson gelangt, selbst wenn sie richtig
wären, in einer Weise ausgesprochen sind, welche
wenig geeignet macht, sie auf die Praxis, anzu-
wenden, so ist die ganze Darstellung auf Seite
17 bis 202, mittelst derer er zu ihnen gelangt, eine
auf Umwegen gehende, dass die daraus gezogenen
Schlüsse wenig Vertrauen verdienen. Herr Poisson
richt es in Bezug auf die Seitenabweichungen
fest, dass sie ohne Ende wachsen werden
und es muss erlaubt sein, nach der Analogie zu
schliessen, dass auch die Modificationen der Schuss-
weite, insofern sie durch die Umdrehung herbei-
geführt werden, unter Umständen erheblich werden
können. Herr Poisson muss diess um so eher zu-
geben, als sonst der versprochene Nachweis gar
nicht vorhanden ist.

Allein es ist Beides unrichtig. Aus Herrn
Poissons Differentialgleichungen folgt weder eine
irgend erhebliche Seitenabweichung noch
dergleichen Modification der Schussweite, als
der Umdrehung des Geschosses herrührend,

vielmehr

lässt sich aus Herrn Poisson's eigenen Differentialgleichungen direct nachweisen, dass unter den Voraussetzungen, unter denen sie entstanden sind, weder irgend erhebliche Seitenabweichungen noch irgend erhebliche Modificationen der Bahn in der vertikalen Richtungsebene statt haben können.

Wir wollen diese Behauptung zunächst in Betreff der Seitenabweichungen durchführen und zwar in dem allgemeinsten Falle und wir benutzen dazu die erste und zweite der Gleichungen [3] auf Seite 50, welche für den allgemeinsten Fall gelten und in ihrer Verbindung sich auf die Projection der doppelt gekrümmten Bahn auf den Horizont beziehen.

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{dy}{dt}$, die zweite dagegen mit $\frac{dx}{dt}$, und zieht das erstere Product von dem letzteren ab; so erhält man

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \text{expl.} \frac{ds}{dt} \cdot \left[\frac{dy}{dt} (q \cdot \alpha - p \cdot \beta) - \frac{dx}{dt} (q \cdot \alpha' - p \cdot \beta') \right]$$

Bezeichnet man nun den Winkel, welchem die Tangente der horizontalen Projection der Bahn mit der Achse der x einschliesst, mit φ , so dass also $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$, bezeichnet man ferner den Winkel, welchem die Tangente der Bahn im Raume mit der Ebene der x, y einschliesst, mit ψ , so hat man

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \cos \psi_1 \cdot \cos \varphi_1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \cos \psi_1 \cdot \sin \varphi_1$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \sin \psi_1$$

Dividirt man nun die auf der vorigen Seite gefundene Gleichung auf beiden Seiten mit $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ und setzt auf der rechten Seite für $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die vorstehenden Werthe, so erhält man zunächst

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\epsilon \mu l}{\cos^2 \varphi_1 \cdot \cos \psi_1} \cdot \left[\sin \varphi_1 \cdot (q \cdot \alpha - p \cdot \beta) - \cos \varphi_1 \cdot (q \cdot \alpha' - p \cdot \beta') \right].$$

Ausdruck links ist gleich $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} =$

$$\frac{d(\tan \varphi_1)}{dt} = \frac{d\varphi_1}{\cos^2 \varphi_1 \cdot dt}$$

substituiert man dies, so wie die Werthe für $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ Seite 52, [2], und die Werthe für p und q von Seite 51, [1], so erhält man mittelst der erforderlichen Reductionen

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\epsilon \mu l}{\cos \psi_1} \cdot \left[\cos \delta \cdot \cos(\varphi_1 + \psi) \cdot \frac{d\delta}{dt} - \sin(\varphi_1 + \psi) \cdot \sin \delta \cdot \frac{d\psi}{dt} \right]$$

indem man innerhalb der Klammer den Ausdruck $\sin(\varphi_1 + \psi) \cdot \sin \delta \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \sin(\varphi_1 + \psi) \cdot \sin \delta \cdot \frac{d\varphi_1}{dt}$, ($= 0$) zusetzt,

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\epsilon \mu l}{\cos \psi_1} \left[\cos \theta \cdot \cos (q_1 + \psi) \cdot \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \cdot \sin (q_1 + \psi) \cdot \frac{d(q_1 + \psi)}{dt} \right] \\ + \frac{\epsilon \mu l}{\cos \psi_1} \cdot \sin \theta \cdot \sin (q_1 + \psi) \cdot \frac{dq_1}{dt}.$$

und dies lässt sich schreiben:

$$\frac{dq_1}{dt} \left[1 - \frac{\epsilon \mu l}{\cos \psi_1} \cdot \sin \theta \cdot \sin (q_1 + \psi) \right] = \frac{\epsilon \mu l}{\cos \psi_1} \cdot \frac{d[\sin \theta \cdot \cos (q_1 + \psi)]}{dt} \\ \dots \dots \dots [6]$$

Betrachten wir nun zunächst den Ausdruck in der Klammer linker Hand, so beträgt die Excentricität des Geschosses, nämlich ϵl , immer nur einige wenige Hunderttheile eines Zolles, ^{auch} ist μ immer sehr klein, indem es die Einheit darstellt, dividirt durch eine sehr grosse Strzahl von Zollen, dergestalt, dass $\epsilon \mu l$ eine reine Zahl wird, für welche in allen Fällen der Praxis die Annahme eines Werthes von

$$0,000005$$

eine sehr hohe ist. Der $\angle \psi$ bezeichnet im Allgemeinen den Richtungswinkel der einzelnen Elemente der doppelt gekrümmten Flugbahn in Bezug auf die horizontale Ebene der x, y . Er ist positiv für den aufsteigenden Ast der Bahn, und negativ für den absteigenden Ast. Sein absoluter Zahlenwerth übersteigt nie 90° und ist im Treffpunkte des Geschosses (in den meisten Fällen) am grössten.

Der $\cos \psi$ ist mithin immer positiv und hat seinen kleinsten Werth da, wo das Geschoss den Horizont trifft. An dieser Stelle hat mithin der Factor $\frac{1}{\cos \psi}$ seinen grössten Werth. Nun ist die Annahme von $\psi = 87^\circ$ für die Grösse des grössten Einfallswinkels, welcher in der Praxis vorkommen kann, jedenfalls eine höchst übertriebene, und ist mithin, wenn wir für ψ diesen Werth ganz allgemein einführen, dadurch dem Factor $\frac{1}{\cos \psi}$ ein übermässig hoher Werth beigelegt. $\cos 87^\circ = 0,052$. Da ferner der höchste Werth, welchen das Product $\sin \delta \cdot \sin (\varphi + \psi)$ annehmen kann, ± 1 ist, so haben wir, wenn wir in der Klammer linker Hand von [6] auf pag: 60

für ϵ die Zahl $0,000\ 005$

für $\cos \psi$ gerundet $0,05$ und

für $\sin \delta \cdot \sin (\varphi + \psi)$ die Zahl ± 1

setzen, als die (übermässig angenommen) weitesten Grenzen für den Werth des eingeklammerten Factors von $\frac{d\epsilon}{dt}$ die Zahlen $[1 \pm 20 \cdot 0,000\ 005]$, oder $1 \pm 0,000\ 1$.

Nehmen wir uns mithin die Gleichung [6] auf Seite durch den eingeklammerten Factor von $\frac{d\epsilon}{dt}$ dividirt und dann für denselben die obigen äusseren Grenzen gesetzt, so hat man, da

$$\frac{1}{1 \pm 0,0001} \text{ nähert sich gleich } 1 \mp 0,0001$$

und wenn man $1 \mp 0,0001 = m$ setzt,

$$\frac{dq_1}{dt} = m \cdot \frac{\varepsilon_{\mu l}}{\cos \psi_1} \cdot \frac{d(\sin \delta \cdot \cos(q_1 + \psi))}{dt},$$

sedann aber, indem man das dt wegmultiplicirt

$$dq_1 = m \cdot \frac{\varepsilon_{\mu l}}{\cos \psi_1} \cdot d(\sin \delta \cdot \cos(q_1 + \psi)),$$

Da nun $\cos \psi_1$ zwar veränderlich, aber immer positiv ist, so wird man, wenn man für $\cos \psi_1$ seinen kleinstmöglichen Werth setzt, dadurch bewirken, dass der Factor $\frac{\varepsilon_{\mu l}}{\cos \psi_1}$ seinen möglichst grössten Werth annimmt und dass man durch die Integration sodann den grössten Werth für q_1 erhält, welcher unter den übertriebensten Annahmen für seine Vergrösserung nur immer möglich und denkbar ist. Setzen wir mithin in dem für dq_1 zuletzt gefundenen Ausdrucke wieder

für $\varepsilon_{\mu l}$ die Zahl 0,000 005 und

für $\cos \psi_1$ die Zahl 0,05,

integriren dann und nehmen an, dass für $q_1 = 0$ die Anfangswerte von δ, q_1, ψ respective δ', q'_1, ψ' gewesen seien, so haben wir

$$q_1 = m \cdot 0,0001 \cdot [\sin \delta \cdot \cos(q_1 + \psi) - \sin \delta' \cdot \cos(q'_1 + \psi')],$$

und da der Ausdruck in der Klammer höchstens den Werth ± 2 annehmen kann,

$$Q_1 = \pm m. 0,0002$$

Nimmt man sich ferner, dass dieser äusserste Werth von Q_1 für die ganze Dauer der Flugbahn statt ge-
worden hätte, so heisst diess:

- a, die grösste Seitenabweichung, welche aus den von Herrn Poisson aufgestellten Differentialgleichungen folgt, würde für eine Schussweite von 10000 Schritten, d. h. in der Entfernung einer deutschen Meile höchstens 2 Schritte rechts oder links betragen und
- b, diese Angabe ist (wegen m) unsicher um $\pm 0,0001$ ihres Werthes.

Da aber in der Artilleriepraxis schon auf sehr äusseren Entfernungen Abweichungen von mehreren hundert Schritten vorkommen können, welche ohne irgend einen Zweifel nur in der Umdrehung der Geschosse ihren Grund haben, so leuchtet ein, dass Herrn Poissons Untersuchungen hierbei nicht weichen.

23. Um vieles einfacher ist der Nachweis dafür Betreff der Modificationen der Schussweiten der verticalen Nichtebebene. Die Verringerung, respective Vermehrung der Schussweiten

64.

(für flache und mittlere Winkelertörungen der Seelenactse des Geschützes — denn für höhere tritt für dieselbe Richtung der Umdrehung immer das Entgegengesetzte ein), welche im Vergleich zu einem concentrischen Geschosse unter sonst gleichen Umständen statt haben, werden augenscheinlich dann am grössten sein, wenn die Drehactse immer genau senkrecht auf der vertikalen Richtungsebene des ursprünglichen Stosses steht, und mithin gar keine Seitenabweichungen statt haben. Dieser Fall aber ist derjenige, auf welchen sich die Gleichungen [4] des Herrn Poisson, Seite 54 dieser Abhandlung beziehen. Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{dz}{dt}$, die zweite mit $\frac{dx}{dt}$, und zieht das erstere Product vom zweiten ab, so erhält man

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + g \cdot \frac{dx}{dt} = \text{cylp.} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt} \cdot \sin \theta - \frac{dz}{dt} \cdot \cos \theta \right),$$

Setzt man nun den Richtungswinkel, welchen die Tangente jedes beliebigen Elements der Flugbahn mit dem Horizonte einschliesst, wiederum $= \psi$, so dass also $\frac{dz}{dx} = \tan \psi$ ist, so hat man

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \cos \psi, \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \sin \psi,$$

und aus [5], Seite 55, noch $p = \frac{dv}{dt}$.

Dividirt man daher die auf der ^{Seite gefundenen} vorigen Gleichung durchweg mit $(\frac{dx}{dt})^2$, macht alle die ungedeuteten Substitutionen, reducirt gehörig und beachtet noch, dass $\tan \psi = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, so erhält man, da $\frac{d(\tan \psi)}{dt} = \frac{d\psi}{dt \cdot \cos^2 \psi}$,

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{g \cdot \cos \psi^2}{\frac{dx}{dt}} = \varepsilon \cdot \mu \cdot l \cdot \sin(\theta - \psi) \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

und hieraus

$$\frac{d\psi}{dt} \cdot \left[1 - \varepsilon \cdot \mu \cdot l \cdot \sin(\theta - \psi) \right] + \frac{g \cdot \cos \psi^2}{\frac{dx}{dt}} = \varepsilon \cdot \mu \cdot l \cdot \sin(\theta - \psi) \cdot \frac{d(\theta - \psi)}{dt}$$

wo ist der höchste Werth für $\sin(\theta - \psi)$ ausgemessen $k = \pm 1$, dies und $\varepsilon \mu l = 0,000005$, wie vorher, in Klammer links gesetzt, erhält man als äusseren Grenzwertke für den Ausdruck in der Klammer

$$1 \pm 0,000005$$

und um so viel wird der durch die Integration zu findende Werth von ψ unsicher. Bei der völligen Vernehlückheit diesser Unsicherheit mag das $\pm 0,000005$ gegen 1 vernachlässigt werden, dass man erhält

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{g \cdot \cos \psi^2}{\frac{dx}{dt}} = \varepsilon \cdot \mu \cdot l \cdot \sin(\theta - \psi) \cdot \frac{d(\theta - \psi)}{dt},$$

multiplirt man nun mit dt , integrirt sodann und

nimmt an, dass für den Anfangswert $\psi = \psi'$, der Anfangswert von δ (betreffs Bestimmung der Constante) δ , gewesen sei, so erhält man

$$\psi = \psi' - \int \frac{g \cdot \cos \psi'^2 \cdot dt^2}{dx} + \text{excl.} [\cos(\delta - \psi') - \cos(\delta - \psi)]$$

Setzt man nun in dem letzten Gliede für das in der Klammer Befindliche seinen grösstmöglichen Werth ± 2 und für excl wieder $0,000005$, so bekommt man für den Werth des letzten Gliedes als äusserste mögliche Grenzen $\pm 0,00001$.

Dieses letzte Glied ändert also den Winkel ψ immer um etwa 2 Winkelsekunden, d. h. die Strömung, welche die Gestalt der Bahn erfährt, wenn man dies Glied vernachlässigt, ist für die Praxis durchaus unerheblich. Thut man dies aber, so bleibt

$$\psi = \psi' - \int \frac{g \cdot \cos \psi'^2 \cdot dt^2}{dx}$$

d. h. ganz dasselbe, was man für die Bestimmung der Flugbahn unter den gewöhnlichen Voraussetzungen und ohne die Annahme einer Umdrehung erhält.

Die hieraus hervorgehende Bahn ist also um nichts, nur irgend Erhebliches, von derjenigen verschieden, welche aus Herrn Poissons Differential-

leichtungen folgen würde, oder mit andern Worten, die
auf Seite 49 aufgestellten Fragen beantworten sich
mithin:

- „ unter den von Herrn Poisson zum Grunde geleg-
- „ ten gangbaren Ideen über den Luftwiderstand
- „ lassen sich aus der hinzutretenden Umdrehung
- „ des Geschosses die in der Praxis sich zeigenden
- „ Abweichungen der Geschosse nicht erklären,
- „ Herr Poisson ist mithin der desfalls übernomme-
- „ nen Verpflichtung nicht allein nicht nachge-
- „ kommen, sondern es ist ihm sogar der vorbe-
- „ zeichnete Umstand ganz entgangen.

24. Dass unter den Voraussetzungen, wie Sie Herr
Poisson macht, durch den blossen Umschwung und
Stört, wie die Einwirkung des Luftwiderstandes da-
rch modificirt wird, keine nur irgend bemerkbare
dauernde Abweichung der Artilleriegeschosse aus
der Bahn herbeigeführt werden könne — zu diesem
Resultat war ich, obgleich auf einem etwas verschie-
den Wege bereits zwei Jahre vor der Zeit gelangt,
welcher Herr Poisson seine desfallsigen Arbeiten
Academie der Wissenschaften zu Paris vorlegte.

Im Winter 1836/7 hatte ich eine Abhandlung zusammengestellt, welche seitdem im Fünften Bande des mehrerwähnten „Archiv's“ abgedruckt worden ist und in welcher ich auf Seite 123 - 124 jene Ansicht durchzuführen gesucht habe. Ich legte diese Arbeit, gleich nachdem ich sie beendet hatte, zwei gewiegten Mathematikern vor, und beide erklärten meine Beweisführung für richtig und die in Rede stehende Behauptung für begründet. Von der schriftlichen Äusserung des einen dieser Gelehrten, eines rüchmlichst bekannten Astronomen, gebe ich hier einen Auszug, durch welchen zugleich der Zeitpunkt, zu welchem ich jene Arbeit beendet hatte, constatirt wird: N. N. d: 1 Februar 1837. —

— „ Wenn eine Kugel (ohne auf den Widerstand des
 „ Mittels, in welchem sie sich bewegt, zu sehen)
 „ auf einer Ebene ohne Reibung und Gleitung
 „ bewegt gedacht wird (Ihre Aufhebung der Schwere)
 „ re) und ihr Schwerpunkt nicht mit dem Mittelpunkt zusammenfällt, so wird der anfängliche Stoss den Schwerpunkt in gerader Linie forttreiben; der Mittelpunkt wird sich um diesen Schwerpunkt drehen, folglich keine gerade Linie beschreiben. Da nun der Widerstand nach der Tangente an der Bahn der

„Mittelpunkts wirrt, so wird
eine, aber
„nothwendig eine so kleine und periodische Ab-
„weichung der Bahn des Schwerpunktes von der
„geraden Linie hervorgebracht, dass sie für jede
„Praxis ganz bei Seite gesetzt werden kann.“

Obgleich ich durch eine so gewichtige Bestimmung
nicht füglich hätte als gesichert ansehen können,
so nahm ich dennoch Anstand, mit meiner Ar-
beit öffentlich hervorzutreten, aus einem Grunde,
den ich um so lieber hier ausführlich angebe, weil
er zugleich nach einer andern Richtung hin eine
persönliche Mecktfertigung für mich enthält.

25. Wenn nämlich die von mir aufgestellte und
durch die vorerwähnte zwiefache Zustimmung sanc-
tionierte Ansicht richtig sein sollte, so blieb für die
überaus erheblichen Ablenkungen der Artilleriege-
hosse, welche in der Praxis wirklich wahrgenom-
men werden, durchaus kein anderer denkbare
Grund mehr übrig, als eine förmliche Reibung der
Oberfläche der Geschosse an den Luftpartikelchen
anzunehmen. Diese Erklärungsweise fand aber
unter den Artilleristen ausserordentlich wenig Bei-
fall, indem man namentlich das Argument
anführte, dass den Erfahrungen zufolge
wirklich statt findende Michtung der Abwei-

chungen gerade die entgegengesetzte von der sei, welche aus der Annahme einer Luftreibung folgen würde. Da nun von den beiden (nach dem damaligen Standpunkte: einzigem) Gründen für die Abweichungen der erste als beseitigt zu betrachten war, so blieb mir folgerichtig nichts anderes übrig, als

a, zu vermuten (hypothetisch anzunehmen), dass die durch den Stoss der Ladung bewirkte Mithitung der Umdrehung noch vor dem Austritt des Geschosses aus dem Rohr durch die Strichschläge im demselben zum Umschlagen in die entgegengesetzte Mithitung gebracht werde, und

b, Bestätigung dieser Vermuthung oder eine zuverlässige Widerlegung derselben aus positiven Erfahrungen (gelegentlichen oder absichtlich herbeigeführten) zu erwarten.

Trat eine Widerlegung ein, so war nun (nach dem damaligen Stande dieser Angelegenheit

c, gar kein Grund mehr vorhanden und die ganze Erscheinung vorläufig unerklärlich, insofern man sich nicht etwa mit Missverständnissen, wie die in den nro 12 bis 16 und in nro 19 erörterten, beschwichtigen wollte.

Für jeden aber, der diese Missverständnisse als solche

erkannt hatte, blieb dann nur noch übrig,

d, einzusehen, dass von den möglicherweise einflussreichen Umständen noch einer unbeachtet geblieben sein müsse.

Späterhin hat sich die in b, vorstehend erwähnte Widerlegung zwar dahin herausgestellt, dass auch unter Umständen, wo an ein Umschlagen der Richtung der Motation nicht zu denken war, die Erscheinungen genau so erfolgten, wie sie in no 2 dieser Abhandlung bezeichnet sind. So lange dieser Punkt aber noch nicht zuverlässig festgestellt war, war es von den Gegnern der Luft-Reibung so übereilt, einen möglichen Einfluss derselben positiv abzulehnen, als es nach Aufklärung dieses Punktes unthunlich sein würde, in der Luft-Reibung noch ferner den Grund für die in Rede stehenden Abweichungen zu suchen.

Diess ist der Standpunkt, von wo aus man das Urtheilen muss, dass ich auf dem im Elfter Bande des „Archiv's“ von Seite 123 - 134 versuchte Beweis einen ferneren Versuch zu einer Erörterung über den Einfluss der Luftreibung auf Seiten 135 - 142 folgen liess. Wären mir die später bekanntgewordenen Thatsachen schon damals bekannt gewesen, so würde ich es unterlassen

haben.

26. Als ich nun das Poisson'sche Werk unmittelbar nach dessen Erscheinen einer genaueren Durchsicht unterwarf, und daraus ersah, dass sich aus den darin enthaltenen Differenzialgleichungen für den Fall B. C. (nro 21) genau dasselbe Resultat ergab, welches ich selbst gefunden hatte, und da ferner Herr Poisson gegen die Luftreibung keinen andern Grund, als seine Aukthorität geltend zu machen gewusst hatte, so hielt ich mich nun für berechtigt, die vorerwähnte Arbeit der Öffentlichkeit zu übergeben.

Bei der Aufstellung des in Rede stehenden Beweises ging ich von folgenden Ansichten aus:

a. Soll die Umdrehung an sich und die daraus hervorgehende Modification des Luftwiderstandes eine Ablenkung der Geschosse hervorbringen können, so muss dies auch der Fall sein, wenn gar keine Schwere existirte, denn beide Kräfte haben gar nichts miteinander gemein, sind von einander ganz unabhängig.

b. Sollte sich also etwa nachweisen lassen, dass durch den ad a genannten Umstand in dem Falle keine Ablenkung entsteht, wenn keine Schwere existirte, so gilt dies auch für den Fall, dass die

73

Schwere hinzutritt. Denn wäre dies nicht, so müßten beide Ursachen eine innere Beziehung zu einander haben, gegen die Voraussetzung.

Diese Art der Vorstellung musste die Untersuchung sehr erleichtern, da man nur noch annehmen brauchte, der ursprüngliche Stoss erfolge in einer Ebene, welche senkrecht auf der ursprünglichen Drehachse stehend durch den Schwerpunkt und Mittelpunkt des Geschosses gelegt war, so wie, dass auf beiden Seiten dieser Ebene alles symmetrisch sei, um die ganze Betrachtung auf die einer ebenen Curve zurückgeführt zu sehen, bei welcher alle etwaigen Abweichungen von der ursprünglichen Richtung ein als das Maass der zu untersuchenden Ursache ohne alle Beimischung einer andern angesehen werden konnten.

Unter diesen Voraussetzungen bezeichne nun

- { die rechtwinkligen Coordinaten der Bahn des
- { Schwerpunktes in einer Ebene, welche vertical gedacht sein mag. Die einzelnen Partikel des Geschosses sind auf beide Seiten der Ebene symmetrisch vertheilt und der ursprüngliche Stoss erfolgt in jener Ebene, so dass also die Drehachse immer normal zu derselben, also immer in horizontaler Lage verbleibt. Die x , werden

horizontal, nach der Richtung des Stosses, die y ,
vertical, positiv nach oben gedacht.

v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in irgend
einem Punkte der Bahn nach der Richtung
der Tangente daselbst

t die seit dem Anfang der Bewegung verfllossene
Zeit

φ den correspondirenden Richtungswinkel der Tan-
gente, bezogen auf die Achse der x ,

ψ den Winkel, um welchen sich das Geschoss seit
dem Anfang der Bewegung gedreht hat,

ω die entsprechende Winkelgeschwindigkeit,

e den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkt,
die Excentricität,

I das Trägheitsmoment des Geschosses in Bezug
auf die Drehachse durch den Schwerpunkt,

M die Masse des Geschosses,

$2g$ die Beschleunigung der Schwere.

v die Geschwindigkeit des Mittelpunktes nach der
Tangente seiner Bahn

F_v das Symbol für diejenige Function, welche
das Gesetz des Luftwiderstandes ausdrückt.

Die Gleichungen, welche die Natur der ganzen
Bewegung ausdrücken, sind dann (Seite 126 und
127 jenes Aufsatzes) die nachfolgenden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_{x_1}^2}{l^2} &= - (v, \cos \varphi_1 + \varepsilon \omega \cos \psi) \cdot \frac{2g}{M} \cdot \frac{\sqrt{[v^2 + \varepsilon^2 \omega^2 + 2v, \varepsilon \omega \cos (\varphi_1 + \psi)]^{\frac{1}{2}}}}{[v^2 + \varepsilon^2 \omega^2 + 2v, \varepsilon \omega \cos (\varphi_1 + \psi)]^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{l_{y_1}^2}{l^2} &= - (v, \sin \varphi_1 - \varepsilon \omega \sin \psi) \cdot \frac{2g}{M} \cdot \frac{\sqrt{[v^2 + \varepsilon^2 \omega^2 + 2v, \varepsilon \omega \cos (\varphi_1 + \psi)]^{\frac{1}{2}}}}{[v^2 + \varepsilon^2 \omega^2 + 2v, \varepsilon \omega \cos (\varphi_1 + \psi)]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} [7]$$

$$\frac{l_{\psi}}{l} = \omega$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{l_{\psi}^2}{l^2} &= - \frac{2g \cdot \varepsilon [\varepsilon \omega + v, \cos (\varphi_1 + \psi)] \cdot \sqrt{[v^2 + \varepsilon^2 \omega^2 + 2v, \varepsilon \omega \cos (\varphi_1 + \psi)]^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{[v^2 + \varepsilon^2 \omega^2 + 2v, \varepsilon \omega \cos (\varphi_1 + \psi)]^{\frac{1}{2}}}} \end{aligned} \right\} [8]$$

In welcher Weise aus diesen Gleichungen die in Meder'scher Behauptung herzuleiten gesucht wird, möge der geneigte Leser in dem Original nachsehen. Hier sind dieselben nur aufgestellt, um daraus folgende Bemerkung anzuknüpfen.

Setzt man auf der rechten Seite der zweiten Gleichung [7] noch die Beschleunigung der Schwere hinzu, und zwar negativ, so beziehen sich die Gleichungen und [8] sofort auf den in der Artilleriepraxis als interessanteren Fall, wo nämlich die Drehachse horizontal und zwar senkrecht auf der vertikalen Richtungsebene gedacht, von der Seitenabweichung abstrahiert und nur der Einfluss der Umdrehung auf die Schussweiten in Betracht gezogen wird. Für den Fall aber hat Herr Poisson die Gleichungen und [5] auf den Seiten 54 und 55 dieser Abhand-

lung hingestellt. Sie sehen ziemlich verschieden von den unter [7] und [8] gegebenen aus. Schreibt man indessen letztere mit den Bezeichnungen des Herrn Poisson um, entwickelt den Wurzel Ausdruck nach steigenden Potenzen der Excentricität, nimmt die Poisson'sche Hypothese für das Luftwiderstandsgesetz an und vernachlässigt schliesslich die höheren Potenzen der Excentricität von der zweiten an, so gehen die Gleichungen [7] und [8] genau in die nos [4] und [5] über. Hiernach sind also

a. die Differentialgleichungen für den speciellen Fall, der in der Artilleriepraxis am häufigsten und eigentlich nur ganz allein interessiert, von mir um einige Jahre früher und in einer viel vollständigeren Gestalt, als von Herrn Poisson gefunden worden, und ich habe

b. zu derselben Zeit bereits die Ansicht aufgestellt, und durchzuführen versucht, dass aus ihnen die in der Praxis beobachteten Abweichungen der Geschosse sich nicht erklären lassen, während Herrn Poisson dieser Umstand entgangen ist.

Aus dieser Übereinstimmung der auf so verschiedene Wege gefundenen scheint nun Folgendes hervorzugehen:

a, bei vollkommener äusserer Kugelgestalt der Ge-

geschosses kommt man zu demselben Resultat, man
 mag, wie Herr Poisson es gethan hat, und wie es auch
 in dem no 12 u. f. dieser Abhandlung geschehen ist, die
 Bewegung jedes einzelnen Elements der vorderen Kugel-
 oberfläche und die Einwirkung des Luftwiderstandes
 auf dasselbe zunächst für sich betrachten und das
 sammtresultat für die ganze Kugeloberfläche durch
 die Integration finden, oder man mag, wie in dem
 obigen Satze, im Gegentheil nur die Bewegung
 des Mittelpunktes der Kugel für das gerade betrach-
 tete Element aus der fortschreitenden und der
 heriden Bewegung nach Richtung und Grösse
 mitteln und nur den Luftwiderstand, welchen
 es der dafür angenommenen Hypothese ein ohne
 Drehung geradlinig fortgehendes homogenes Geschoss
 wider würde, gehörig in Rechnung stellen.

3. Wäre dies aber begründet, dann würden die
 Differentialgleichungen für den allgemeineren Fall,
 welche unter [3] auf Seite 53 dieser Abhandlung ge-
 geben sind, auf einem viel weniger umständlichen
 Wege und in einer viel vollständigeren Gestalt ge-
 geben werden können, als es von Herrn Poisson ge-
 than ist, ohne dass man, wie dieser zu dem bedenk-
 lichen Mittel zu greifen gezwungen wäre, gleich von
 vorn herein alle höheren Potenzen der Excentricität,

78.

von der zweiten an gerechnet, zu vernachlässigen.

25. Dabei muss jedoch noch ein sehr wesentliches Bedenken zur Sprache gebracht werden. So wenig in der Abhandlung des Herrn Poisson, noch in der im elften Bande des „Archiv's“, ist ausdrücklich darauf Rücksicht genommen, dass die Dichtigkeit der Luft vor den verschiedenen Punkten der vorderen Kugeloberfläche eine sehr verschiedene, dass sie am dem vordersten Punkte am dichtesten ist und von da ab nach hinten hin allmählig abnimmt. Auf diesen Punkt legen mehrere der vorangeführten Darstellungen ein grosses Gewicht.

26. Wir wollen mithin das ganze Problem noch einmal ganz von vorn aufnehmen, und wollen dabei

a, die ungleiche Dichtigkeit der Luft vor der vorderen Fläche des Geschosses berücksichtigen, um zu sehen, ob sich alsdann der bis dahin noch verborgene Grund für die besprochenen Abweichungen herausstellt. Dabei wollen wir

b, wie Herr Poisson, von der Betrachtung des einzelnen Elements der Kugeloberfläche ausgehen,

c, und, wie er, den Luftwiderstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional nehmen.

27. Man denke sich also, dass Schwerpunkt und Mittelpunkt des Geschosses in der vertikalen Richtungsebene des ursprünglichen Stosses liegen, und dass die Drehung mitteln um eine Drehachse erfolgt, welche senkrecht auf der vertikalen Richtungsebene steht. Die Partikeln des Geschosses seien rechts und links desselben symmetrisch vertheilt, so dass der Schwerpunkt und Mittelpunkt immer in jener Ebene und die Drehachse immer in ihrer horizontalen Lage verbleibt. Die Bahn ist also eben.

Sei nun in Figur 5 der Punkt b derjenige der Kugeloberfläche, welcher in nähere Erwägung genommen wird. Parallel zur vertikalen Richtungsebene denke man sich durch b eine parallele Ebene gelegt und diese sei die Ebene des Papiers. Man denke sich ferner noch folgende Ebenen, senkrecht auf der vertikalen Richtungsebene und zwar

- eine durch den Schwerpunkt des Geschosses und senkrecht auf dem Horizont; ihr Durchschnitt mit der ersten Parallelebene durch b sei icl ;
- eine zweite durch den Schwerpunkt und den Mittelpunkt; ihr Durchschnitt mit der ersten Parallelebene durch b sei $kacm$;
- endlich eine dritte Ebene durch den Mittelpunkt des Geschosses und den Punkt b gehend; ihr Durch-

80.

schnitt mit der ersten Parallelebene durch b sei abp .
 Für der so eben genannten dritten Ebene denke man
 sich den zu dem Punkte b gezogenen Halbmesser,
 und der Winkel, welchen derselbe mit der vertikalen
 Richtungsebene einschliesst, heisse

φ . Ferner sei

$\angle mab = \psi$. Die Lage des Geschosses, wie sie durch
 die Umdrehung herbeigeführt wird, bestimmt sich
 durch $\angle ich = \delta$.

r sei der Halbmesser des Geschosses und
 $\varepsilon = ac$, dessen Excentricität.

Die fortschreitende Geschwindigkeit, welche allen
 Punkten der Kugel gemeinsam ist, sei in Richtung
 und Grösse dargestellt durch $v = bq$.

Ferner sei rbq horizontal und $\angle gbq = \varrho$. Es ist
 derselbe Winkel, welchen die Richtung des Schwer-
 punktes mit dem Horizonte bildet.

w sei die der Umdrehung entsprechende Winkelge-
 schwindigkeit.

28. Man denke sich nun den Halbmesser zu b ge-
 hörig verlängert, so bildet die Verlängerung eine
 Normale für den Punkt b , welche die Richtung
 bezeichnet, in welcher der Luftwiderstand auf das
 zu b gehörige Flächenelement wirkt. Diesen Luft-
 widerstand kann man zerlegt denken in zwei andere,

von denen der eine senkrecht steht auf der Ebene des Papiers, der andere aber in dieselbe fällt und längs pb wirkt. Der erstere wird durch einen gleichem und genau entgegengesetzten Druck auf der andern Seite der verticalen Richtungsebene compensiert und aufgehoben. Bezeichnet man den zweiten, in der Ebene des Papiers wirkenden Antheil mit d^2W_e , und den nach der Normale des Punktes b wirkenden Luftwiderstand mit d^2W_n , so ist

$$d^2W_e = d^2W_n \cos \varphi \dots \dots \dots [9]$$

Es bezeichnet $bg = v$ die aller Punkten des Geschosses gemeinsame fortschreitende Geschwindigkeit. Stellt man bf , welches senkrecht auf cb gezogen ist, die am Punkte b entsprechende Umdrehungsgeschwindigkeit dar, dergestalt, dass

$$bf = w \cdot bc,$$

vollende man das Parallelogramm der Geschwindigkeiten $gbfk$, um mittelst der Diagonale bh die wahre Geschwindigkeit des Punktes b zu erhalten. Bezeichnet nun

das Flächenelement bei b

das Gewicht einer Cubikeinheit Luft von der Dichtigkeit, wie sie bei b statt findet

die Beschleunigung der Schwere,

einen noch unbestimmten Bruchtheil der zu bh ge-

82.

höheren Geschwindigkeitshöhe

i den Winkel, welchen bh mit der Normale zu b einschliesst, so ist unter der Voraussetzung eines Luftwiderstandes, welcher dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist,

$$d\tilde{W}_n = f. G. \lambda. \frac{bh^2}{4g} \cdot \cos i^2 \dots \dots \dots [10].$$

Entwicklung der $\cos i$: Nach bekannten trigonometrischen Formeln ist $\cos i = \cos \epsilon \cdot \cos hbp \dots \dots \dots [11]$

Sodann $ab = r \cdot \cos \epsilon$

$$bc^2 = ab^2 + \epsilon^2 - 2ab \cdot \epsilon \cdot \cos \psi = r^2 \cos^2 \epsilon + \epsilon^2 - 2r\epsilon \cdot \cos \epsilon \cdot \cos \psi.$$

$$\sin abc = \frac{\epsilon \cdot \sin \psi}{bc}, \quad \cos abc = \frac{r \cdot \cos \epsilon - \epsilon \cdot \cos \psi}{bc}.$$

$$\angle bgh = \psi - \theta - \epsilon + abc.$$

$$\sin bgh = \frac{r \cdot \cos \epsilon \cdot \sin(\psi - \theta - \epsilon) + \epsilon \cdot \sin(\theta + \epsilon)}{bc}$$

$$\cos bgh = \frac{r \cdot \cos \epsilon \cdot \cos(\psi - \theta - \epsilon) - \epsilon \cdot \cos(\theta + \epsilon)}{bc}$$

$$\sin gbh = \frac{\omega \cdot bc \cdot \sin bgh}{bh} = \frac{\omega \cdot [r \cdot \cos \epsilon \cdot \sin(\psi - \theta - \epsilon) + \epsilon \cdot \sin(\theta + \epsilon)]}{bh}$$

$$\cos gbh = \frac{v - \omega \cdot [r \cdot \cos \epsilon \cdot \cos(\psi - \theta - \epsilon) - \epsilon \cdot \cos(\theta + \epsilon)]}{bh}$$

$$\angle hbq = \epsilon - gbh.$$

$$\sin hbq = \frac{v \cdot \sin \epsilon - \omega \cdot [r \cdot \cos \epsilon \cdot \sin(\psi - \theta) + \epsilon \cdot \sin \theta]}{bh}$$

$$\cos h b q = \frac{v \cdot \cos \varrho - \omega \cdot [r \cdot \cos \varrho \cdot \cos(\psi - \delta) - \varepsilon \cdot \cos \delta]}{b h.}$$

$$\angle h b p = h b q + q b p = h b q + 90^\circ + \delta - \psi$$

$$\cos h b p = \frac{v \cdot \sin(\psi - \delta - \varrho) + \omega \varepsilon \cdot \sin \psi}{b h.}$$

Dies in [11] gesetzt, kommt

$$\cos i = \frac{\cos \varrho \cdot [v \cdot \sin(\psi - \delta - \varrho) + \omega \varepsilon \cdot \sin \psi]}{b h.} \dots \dots [12]$$

Betrachtet man nun noch, dass $f = r^2 \cos \varrho \cdot d\varrho \cdot d\psi$ und setzt dies, so wie $\cos i$ aus [12] in [10], so kommt

$$d^2 W_n = \frac{\lambda r^2 G}{4g} \cdot [v \cdot \sin(\psi - \delta - \varrho) + \omega \varepsilon \cdot \sin \psi]^2 \cdot d\psi \cdot \cos \varrho^3 \cdot d\varrho,$$

und wenn man dies in [9] setzt, für den Luftwiderstand $d^2 W_e$, der in der Ebene des Papiers längs pb wirkt,

$$d^2 W_e = \frac{\lambda r^2 G}{4g} \cdot [v \cdot \sin(\psi - \delta - \varrho) + \omega \varepsilon \cdot \sin \psi]^2 \cdot d\psi \cdot \cos \varrho^4 \cdot d\varrho \dots \dots [13]$$

Dieser letztere nun lässt sich zerlegen in einen $d^2 W_h$ nach der horizontalen Richtung ob und in einen $d^2 W_v$ nach der verticalen Richtung nb, so dass

$$d^2 W_h = d^2 W_e \cdot \cos p b q \text{ und } d^2 W_v = d^2 W_e \cdot \sin p b q$$

oder da $\angle p b q = 90^\circ + \delta - \psi$

$$d^2 W_h = \frac{\lambda r^2 G}{4g} \cdot [v \cdot \sin(\psi - \delta - \varrho) + \omega \varepsilon \cdot \sin \psi]^2 \cdot \sin(\psi - \delta) \cdot d\psi \cdot \cos \varrho^4 \cdot d\varrho.$$

$$d^2 W_v = \frac{\lambda r^2 G}{4g} \cdot [v \cdot \sin(\psi - \delta - \varrho) + \omega \varepsilon \cdot \sin \psi]^2 \cdot \cos(\psi - \delta) \cdot d\psi \cdot \cos \varrho^4 \cdot d\varrho.$$

[14]

und diese Ausdrücke sind es, welche, integriert, diejenigen Kräfte ergeben, wodurch die fortschreitende Bewegung modificirt wird.

Was die Drehung anbetrifft, so wirkt d^2W_h an dem Hebelarme ct dahin, den $\angle \theta$ zu vergrössern, also, sie zu beschleunigen, d^2W_v dagegen an dem Hebelarme tb , sie zu verzögern. Man hat mithin, wenn I das Trägheitsmoment des Geschosses für die gewählte Drehachse ist:

$$\frac{I}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \iint [ct \cdot d^2W_h - tb \cdot d^2W_v] \dots \dots \dots [15]$$

$$\text{Nun ist } ct = bc \cdot \sin cbt, \quad tb = bc \cdot \cos cbt$$

$$\angle cbt = 90^\circ + \theta - \psi - abc.$$

$$\sin abc = \frac{\varepsilon \cdot \sin \psi}{bc} \quad \text{und} \quad \cos abc = \frac{r \cdot \cos \theta - \varepsilon \cdot \cos \psi}{bc}$$

Dieses Alles gehörig benutzt, giebt

$$\frac{I}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt} = - \varepsilon \cdot \iint [\cos \theta \cdot d^2W_h + \sin \theta \cdot d^2W_v] \dots \dots \dots [16]$$

29. Was die Grenzen von ψ bei der Integration anbetrifft, so ist Herr Poisson der Meinung, dass sie gegeben werden durch eine Ebene, welche auf der fortschreitenden Geschwindigkeit des Mittelpunkts (durch diesen gehend) senkrecht steht. Dies ist, wie es mir scheint, nicht ganz richtig, vielmehr werden jene Grenzen gegeben durch die Bedingung $i = 90^\circ$ oder $\cos i = 0$, d. h.

vermöge [12] durch die Bedingung

$$v \cdot \sin(\psi - \delta - \varphi) + w \cdot \varepsilon \cdot \sin \psi = 0. \quad [17]$$

Man setze

$$\frac{v \cdot \sin(\delta + \varphi)}{\sqrt{v^2 \sin^2(\delta + \varphi) + [v \cos(\delta + \varphi) + w \varepsilon]^2}} = \sin m \quad \text{und}$$

$$\frac{v \cos(\delta + \varphi) + w \varepsilon}{\sqrt{v^2 \sin^2(\delta + \varphi) + [v \cos(\delta + \varphi) + w \varepsilon]^2}} = \cos m \quad [18]$$

so geht die Bedingung [17] über in $\sin[\psi - m] = 0$
was für die Grenzen ψ_1 und ψ_2 die Werthe

$$\psi_1 = m, \quad \psi_2 = 180^\circ + m$$

gibt.

Die Grenzen für φ sind $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 90^\circ$, letztere Grenze entspricht dem äussersten Seiten-Punkte des Geschosses. Denn man sieht, dass die Dichtigkeit der Luft vor dem Geschoss ungleichförmig vertheilt sei und zwar so, dass sie nach der Ansicht der in no 12 erörterten Abhandlung in dem vordersten Punkt des Geschosses am grössten ist und von da ab nach allen Seiten symmetrisch abnimmt, so heisst dies, man denkt sich G als eine Funktion des Winkels φ , deren Natur näher zu erörtern und festzustellen ist. In dem Ausdruck für G kommt dann aber weder ψ , noch δ , noch φ vor.

Will man daher die Ausdrücke in [14] für die ganze obere Halbkugel, wie sein muss, integrieren, so kann man sie so schreiben: (indem man beide Seiten der vertikalen Richtungsebene berücksichtigt),

$$W_h = \frac{\lambda r^2}{2g} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G \cdot \cos \epsilon^4 \cdot d\epsilon \cdot \int_m^{180^\circ+m} [v \cdot \sin(\psi - \theta - \epsilon) + \omega \epsilon \cdot \sin \psi]^2 \cdot \sin(\psi - \theta) \cdot d\psi$$

$$W_v = \frac{\lambda r^2}{2g} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G \cdot \cos \epsilon^4 \cdot d\epsilon \cdot \int_m^{180^\circ+m} [v \cdot \sin(\psi - \theta - \epsilon) + \omega \epsilon \cdot \sin \psi]^2 \cdot \cos(\psi - \theta) \cdot d\psi \quad [19]$$

Uebersetzen wir nun zurückwärts die Integrale nach ψ heraus, so schreiben sich dieselben durch Benutzung von [18], und wenn man bedenkt, dass

$$\sin(\psi - \theta) = \sin[(\psi - m) - (\theta - m)], \quad \cos(\psi - \theta) = \cos[(\psi - m) - (\theta - m)]$$

$d\psi = d(\psi - m)$, und wenn man ferner

$$\sqrt{v^2 + \epsilon^2 \omega^2 + 2v\omega\epsilon \cdot \cos(\theta + \epsilon)} = (V) \text{ setzt}$$

$$(V)^2 \cdot \int_m^{\pi+m} [\cos(\theta - m) \cdot \sin(\psi - m)^3 - \sin(\theta - m) \cdot \sin(\psi - m)^2 \cdot \cos(\psi - m)] d(\psi - m)$$

$$(V)^2 \cdot \int_m^{\pi+m} [\cos(\theta - m) \cdot \sin(\psi - m)^2 \cdot \cos(\psi - m) + \sin(\theta - m) \cdot \sin(\psi - m)^3] d(\psi - m)$$

Die Integrationen vollzogen und die erhaltenen Werthe in [19] gesetzt, kommt

$$W_h = \frac{\lambda r^2}{2g} \cdot \frac{4}{3} \cos(\theta - m) \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G \cdot \cos \epsilon^4 \cdot d\epsilon \cdot (V)^2 \quad \dots \dots \dots [20]$$

$$W_v = \frac{\lambda r^2}{2g} \cdot \frac{4}{3} \sin(\theta - m) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G \cdot \cos \epsilon^4 \cdot d\epsilon \cdot (V)^2$$

Auch geht die [16] über in

$$\frac{T}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\epsilon \lambda r^2}{2g} \cdot \frac{4}{3} \cos m \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G \cdot \cos \epsilon^4 \cdot d\epsilon \cdot (V)^2 \quad \dots \dots \dots [21]$$

Benutzen wir sodann die Werthe in [18], so verwan-

Setzt man die Gleichungen [20] und [21] in folgende :

$$\left. \begin{aligned} W_h &= \frac{2}{3} \frac{\lambda r^2}{g} (V) \cdot [v \cos \varphi + \omega \varepsilon \cos \theta] \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G \cdot \cos \varphi^4 d\varphi \\ W_v &= -\frac{2}{3} \frac{\lambda r^2}{g} (V) \cdot [v \sin \varphi - \omega \varepsilon \sin \theta] \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G \cdot \cos \varphi^4 d\varphi \end{aligned} \right\} \dots [22]$$

$$T \cdot \frac{d\omega}{dt} = -\varepsilon \cdot \frac{4}{3} \lambda r^2 [v \cos(\theta + \varphi) + \omega \varepsilon] \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G \cdot \cos \varphi^4 d\varphi \cdot (V), \dots [23]$$

Für Aufstellung der Gleichungen für die Natur der Bewegung hat man bekanntlich, wenn M die Masse des Geschosses, und x, y die Coordinaten der Bahn,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{2g \cdot W_h}{M}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2g \cdot W_v}{M}$$

wenn die Kräfte W_h und W_v Verringerungen der betreffenden Coordinaten hervorbringen. Dann ist, wenn D , die mittlere Dichtigkeit des Projektils

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{\lambda}{r\pi D} (V) \cdot [v \cos \varphi + \omega \varepsilon \cos \theta] \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G \cdot \cos \varphi^4 d\varphi \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -2g - \frac{\lambda}{r\pi D} (V) \cdot [v \sin \varphi - \omega \varepsilon \sin \theta] \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G \cdot \cos \varphi^4 d\varphi \end{aligned} \right\} \dots [24]$$

Bezeichnet man nun mit D die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft im gewöhnlichen Zustande, so kann man setzen $G = A \cdot D + B \cdot f\varphi$, wo $f\varphi$ eine Funktion des Winkel φ bedeutet, dergestalt, dass wenn man $B = 0$ setzt, ^{dies} auf die gewöhnlichen Ansichten zurückkommt. Setzt man nun zunächst $B = 0$,

so hat man

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\lambda \pi D}{r \pi D_1} (V) \cdot [v \cos \varphi + \omega \varepsilon \cos \theta] \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \varphi^4 \cdot d\varphi$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -2g - \frac{\lambda \pi D}{r \pi D_1} (V) \cdot [v \sin \varphi - \omega \varepsilon \sin \theta] \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \varphi^4 \cdot d\varphi$$

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = -\varepsilon \cdot \frac{4}{3} \lambda r^2 \pi D (V) \cdot [v \cos(\theta + \varphi) + \omega \varepsilon] \cdot \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \varphi^4 \cdot d\varphi$$

$$\text{und da } \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \varphi^4 \cdot d\varphi = \frac{3}{16} \pi$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{3 \lambda \pi D}{16 r D_1} [v \cos \varphi + \omega \varepsilon \cos \theta] \cdot \sqrt{v^2 + \omega^2 \varepsilon^2 + 2 v \omega \varepsilon \cos(\varphi + \theta)}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -2g - \frac{3 \lambda \pi D}{16 r D_1} [v \sin \varphi - \omega \varepsilon \sin \theta] \cdot \sqrt{v^2 + \omega^2 \varepsilon^2 + 2 v \omega \varepsilon \cos(\varphi + \theta)}$$

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = -\varepsilon \cdot \frac{1}{4} \pi \lambda r^2 \pi D [v \cos(\theta + \varphi) + \omega \varepsilon] \cdot \sqrt{v^2 + \omega^2 \varepsilon^2 + 2 v \omega \varepsilon \cos(\varphi + \theta)}$$

..... [25]

Setzt man nun in diesen Gleichungen $\pi = 1$, dagegen in den Gleichungen [7] und [8] den Luftwiderstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional und bringt man dort, wie hier, die betreffende Geschwindigkeitshöhe mit λ multiplicirt in Rechnung, beachtet auch, dass wo dort ψ steht, hier dafür θ geschrieben ist, so sieht man, dass beide Systeme von Gleichungen genau in einander übergehen.

Hierdurch aber ist - wenigstens für quadratischen Luftwiderstand - dasjenige gerechtfertigt, was auf

den Seiten 76 und 77 unter α und β gesagt ist.

30. Diess Ergebniss liess sich in der That bei einer vorläufigen Erwägung vorhersagen.

Wie auch immerhin die Natur des Schwerpunktes und die des Mittelpunktes beschaffen sein mögen, so lässt sich doch jede derselben nach den Vorstellungen der Infinitesimalrechnung als zusammengesetzt denken aus unendlich vielen kleineren Stückchen, deren jedes für sich eine gerade Linie bildet und die Richtung der Bahrtangente an dieser Stelle angiebt. Wenn nun, wie in allen vorhergehenden Auseinandersetzungen angenommen worden ist, die Dichtigkeit der Luft vor der vorderen Halbkugel so vertheilt ist, dass in Bezug auf die Tangente der Natur des Mittelpunktes Symmetrie statt findet, so leuchtet ein, dass die Gesamtwirkung des Luftwiderstandes nach der Richtung dieser Tangente durch den Mittelpunkt sich geltend machen muss, und dass die Ausmittlung ihres Zahlenwerthes für die unendlich kleine Zeitdauer des eben betrachteten Bahnstückchens auf keine andere Weise erfolgen wird als zu nichts Anderem führen kann, als was die Betrachtung einer geradlinigen Bewegung ohne Vorhandensein einer Drehung unter den gewöhnlichen

90. 91. 92.

Voraussetzungen ergibt. Diess ist um so augenfälliger, als, insofern man den Schwerpunkt als Drehpunkt ansieht, und sodann die Bahn des Mittelpunktes ins Auge fasst, während jedes unendlich kleinen Bahnstückchens in sich alle Punkte des Geschosses nur durchaus gleiche und parallele Geschwindigkeiten haben und die Drehung immer nur zu Anfang und Ende jedes Bahnstückchens, aber nicht innerhalb desselben gedacht wird.

Hält man aber diese Vorstellung fest, dass während jedes unendlich kleinen Stückchens der Bahn des Mittelpunktes die Bewegung des Geschosses als eine geradlinige ohne Drehung angesehen werden muss, so leuchtet ein, dass, wie auch das Gesetz der Vertheilung der Luftdichtigkeit sein mag, sobald sie nur in Bezug auf die Tangente der Bahn symmetrisch ist, die Richtung der Resultante des gesammten Luftwiderstandes immer wieder in die Richtung der Bewegung des Mittelpunktes fallen muss, und zwar andere Werthe der constanten Factoren vor den obigen Klammern der Gleichungen in [25] ergeben, die veränderlichen Factoren derselben aber unafficirt lassen wird.

31. Dann aber ist ohne weitere Erörterung klar, um

vieler die so eben besprochene Vorstellungsweise andern vorzuziehen ist, bei welcher man von Betrachtung der einzelnen Elemente der Kugel-
 Oberfläche ausgeht, indem jene es möglich macht, häufig von jeder bestimmten Form eines Gesetzes, zu welchem der Luftwiderstand gegen eine Kugel
 führt, zu abstrahiren und für dieses Gesetz ein
 gemeinsames Symbol einzuführen, wie es in den
 Abhandlungen [7] und [8] geschehen ist.

Auch wird bei jener Art der Vorstellung die
 Mittelung der Differentialgleichungen für den
 gemeinsten Fall, nemlich für die doppelt ge-
 bestimmte Bahn, um vieles einfacher.

22. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist, dass

a, weder durch die Verschiedenheit in den vorbe-
 zeichneten zwey von einander abweichenden Behand-
 lungsweisen des in Mode stehenden Problems,
 b, noch durch die Annahmen über die Verteilung
 Luftdichtigkeit vor dem Geschoss, wie sie nro 12
 der Abhandlung feststellt,
 Verschiedenheiten in der Form der Endresultate
 beigeführt werden, aus denen sich die Ablen-
 gungen der Geschosse erklären liessen.

33. In der

„Zeitschrift für Kunst, Wissenschaft und Geschichte
„des Krieges. Jahrgang 1842. Zweites Heft.“

befindet sich Seite 95 ein Aufsatz, betitelt: „Die Lud-
wigsche Wurfmaschine.“ welcher den Zweck hat, die
Thatsachen, um welche es sich überhaupt handelt,
bestimmt zu bezeichnen, und demnächst eine popu-
laire Erklärungsweise für das Entstehen derselben
zu geben.

Wir enthalten uns, dem Leser in seinem Urtheile
über diesen Aufsatz vorzugreifen.

34. Endlich befindet sich in dem mehrerwähnten
„Archiv“ und zwar in dem fünfzehnten Bande
desselben, (1843) Seite 93 eine Abhandlung, über-
schrieben:

„Über die Rotation und deren Einfluss auf die
„Bahn der Geschosse, von v. Brookhusen, Le-
„conde“ Lieutenant in der 7^{ten} Artilleriebrigade.“
welche den in Rede stehenden Gegenstand behandelt.

Wir heben daraus folgende Stellen hervor, welche
hinreichend bezeichnen, welche Ansichten der Herr
Verfasser mitbringt und wo er den eigentlichen
Grund für die zu erklärenden Ablenkungen sucht.

gleich im Anfange heisst es:

„ die Behandlung dieser Aufgabe, wenn sie in ihrer
 „ Allgemeinheit aufgefasst werden soll, erfordert
 „ zu ihrer Lösung eine umfassende Vorstellung
 „ aller der darauf Einfluss habenden Kräfte, und
 „ führt dann meistens nur zu Differenzialglei-
 „ chungen, deren Integration sich unausführ-
 „ bar zeigt, und die als Endresultate keinen
 „ Nutzen haben.“

Der Schluss dieses Satzes ist mir völlig unverständ-
 lich und es muss wohl dabei ein Missverständnis-
 nis zum Grunde liegen.

Wenn die Bedingungen der Aufgabe vollständig ge-
 ben sind, wie hier vorausgesetzt werden muss und
 wenn man die Differenzialgleichungen, welche das
 Endresultat der Auflösung enthalten, auf ange-
 messenem Wege und in hinreichender Anzahl her-
 stellt hat, so ist nicht abzusehen, warum sie sich
 nicht auf dem einen oder anderen Wege integrieren
 lassen sollten. Freilich wird diess selten in ge-
 schlossener (endlicher) Form ausführbar sein
 und man wird bei Weitem in der Mehrzahl zu
 Näherungen und Näherungen seine Zuflucht nehmen
 müssen. Wenn man aber jede Auflösung, welche
 hierzu zwingt, als eine solche bezeichnen wollte:

„die als Endresultat keinem Nutzen hat,
so würde man über Neue Lehrttheile der in der Phy-
sik und sonst erlangten Aufklärungen keine Me-
chenschaft geben können.

Ferner heisst es:

— — — „weil die Rotationsachse, bei einer
„Bewegung in der Luft, am den Mittelpunkt der
„Kugel, d. h. am den Punkt, wo der Luftwider-
„stand sich concentrirt, gefesselt sein muss und
„die immer zerrende Centrifugalkraft nicht fä-
„hig sein kann, denselben eine andere Lage zu
„geben.“

Wir stossen hier auf dieselbe irthümliche Ansicht,
welche dem in no 19 dieser Abhandlung erörterten
Aufsatze zum Grunde gelegt ist, — nemlich, dass
selbst bei der freien Bewegung eines festen Kör-
pers die Wahl eines Punktes, welchen man sich
als Drehpunkt denken darf, nicht durchaus frei
sei. Wir haben uns hierüber an jenem Orte aus-
führlich ausgelassen.

Über den eigentlichen Grund der Ablenkungen a-
ber lässt sich der Herr Verfasser in nachfolgender
Weise aus: Seien die beiden Kreise in Figur 6 die
Durchschnitte einer Kugel, welche normal auf der
durch c (c') gehenden Rotationsachse stehen.

Denke man sich bei m und n zwei Ueberkreuzungen der Oberfläche, welche gleichweit von der Richtung der Bewegung des Mittelpunktes abliegen. Dieselben werden durch die Drehung der Kugel in der Zeit, wo der Mittelpunkt den Weg von c bis c' zurücklegt, ihre Lage gegen die Richtung der Bewegung verändert haben. Der von m nach m' bewegte Punkt hat aber eine grössere Geschwindigkeit gehabt, wie der von n nach n' vorangerückte Punkt, weshalb der Luftwiderstand bei m grösser gewesen sein muss, als bei n . Dasselbe wiederholt sich für den Durchschnitt der Kugel und wenn auch der Punkt m , sobald er auf die andere Seite der Richtung der Bewegung gelangt, eine langsamere Bewegung annimmt, so werden doch immer alle Punkte der Kugel an der einen Seite der, durch Richtung der Bewegung des Mittelpunktes und Rotationsachse gegebenen, Ebene eine schnellere Bewegung haben, als an der andern Seite derselben. Dieser Umstand bedingt aber einen grösseren Luftdruck gegen die kleinen Ueberkreuzungen der einen Seite der vorderen Hälfte der Kugel als gegen die der andern Seite. — So weit der Herr Verfasser des im Med. stehenden Aufsatzes. Der Verfasser mischt hier Ueberkreuzungen der Ober-

fläche ein, ohne dass man die Nothwendigkeit oder den Nutzen davon recht absieht. Denn da von einer Leiterwirkung derselben, d. h. von einer Luftreibung durchaus abstrahirt wird, (womit wir ganz einverstanden sind), so werden jene Ueberschreiten nur noch benutzt, die Einwirkung des Luftwiderstandes nach der Richtung der Bewegung erklärlich zu machen. Dazu hätte es aber an sich einer solchen Strömung gar nicht bedurft. Sey denn, wie ihm wolle, und halten wir uns nur an das Argument, dass von je zwei Punkten, die gleich weit von der Richtung der Bewegung des Mittelpunkts abstehen, bei der durch den Pfeil angegebenen Richtung der Umdrehung immer der links liegende eine im Ganzen schnellere Bewegung habe, als der rechtsliegende und deshalb einem grösseren Luftwiderstande ausgesetzt sei.

Die erste Hälfte dieser Behauptungen, so weit sie sich auf die grösseren Geschwindigkeiten bezieht, ist richtig; bei der zweiten aber, wo von der Grösse der Widerstände die Rede ist, ist vernachlässigt worden, die Winkel zu berücksichtigen, unter denen die Flächenelemente bei m und n die Luftpartikelchen treffen, welche in der Richtung ihrer Bewegung, mm' und nn' liegen, und deren Cosinus hierbei eine

wesentliche Rolle spielen. Führt man dies durch, so überzeugt man sich, dass der in Rede stehende Auf-
satz den gewünschten Aufschluss eben so wenig ge-
währt, als die übrigen bisher besprochenen Arbeiten.
Ermittelt man nemlich den Winkel i , welchen jedes
der Flächenelemente m und n mit seiner correspon-
dierenden Richtung mm' und nn' einschliesst, so sind
die Winkel $i = 90 - i$, diejenigen, welche die eben ge-
nannten Richtungen mit der Normale jedes der
beiden Flächenelemente einschliessen. Nimmt man
nun einen Luftwiderstand, etwa proportional dem
Quadraten der Geschwindigkeiten an, ^{und} ermittelt die Wi-
derstände nach den beiden vorbezeichneten Normalen,
so zeigt sich, dass beide durchaus gleich sind. Da
nun beide Normalen gleiche Winkel mit der Rich-
tung der Bewegung des Mittelpunkts einschliessen,
so werden, wenn man jeden der beiden Widerstände
in zwei andre zerlegt, von denen der eine jener Rich-
tung parallel, der andre aber auf ihr senkrecht ist,
die beiden letzteren einander genau gleich und ent-
gegengesetzt sein, sich also gegenseitig aufheben und
eine Ablenkung nicht erzeugen.

Seien in Figur 7 die Flächenelemente m und n Fig 7
die betrachteten. $\angle mcp$ sei $= \gamma = \angle pcr$, mm'' und
 nn'' seien die verlängerten Halbmesser, die Normalen.

Seien mm'' und nn''' die zu pq parallelen und gleichen Fortwärtigungsgeschwindigkeiten v , sei ω die Winkelgeschwindigkeit für die Umdrehung des Geschosses und r dessen Halbmesser. Seien mm' und nn' , respective senkrecht auf ihren zugehörigen Halbmessern die Umdrehungsgeschwindigkeiten für m und n , beide gleich $\omega \cdot r$. Man vollende die Parallelogramme $mm''m'm'$ und $nn'''n'n'$, so sind mm' und nn' die wahren Geschwindigkeiten von m und n nach Grösse und Richtung. Man hat sodann

$$mm' = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2 - 2v\omega r \cdot \cos mm''m'} = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2 + 2v\omega r \cdot \sin \psi}$$

$$\sin m''mm' = \frac{\omega \cdot r \cdot \cos \psi}{mm'}, \quad \cos m''mm' = \frac{v + \omega \cdot r \cdot \sin \psi}{mm'}$$

$$(\cos m''mm')^2 \cdot (mm')^2 = v^2 \cos^2 \psi \dots \dots \dots (\alpha)$$

$$nn' = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2 - 2v\omega r \cdot \cos nn'''n'} = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2 - 2v\omega r \cdot \sin \psi}$$

$$\sin n'''nn' = \frac{\omega \cdot r \cdot \cos \psi}{nn'}, \quad \cos n'''nn' = \frac{v - \omega \cdot r \cdot \sin \psi}{nn'}$$

$$(\cos n'''nn')^2 \cdot (nn')^2 = v^2 \cos^2 \psi \dots \dots \dots (\beta)$$

Nach bekannten Sätzen ist für einen gewissen Factor H , der sich auf die Dichtigkeit der Luft etc., und auf die Grösse der Flächenelemente m und n

bezieht, mithin hier für beide gleich ist, der Widerstand M , der durch $m'm$ nach der Richtung der Normale $m'''m$ hervorgerufen wird,

$$M = H. \cos(m'''mm')^2. (mm')^2 \dots \dots \dots (\gamma)$$

und der Widerstand N , der durch $n'n$ nach der Richtung der Normale $n''n$ erzeugt wird,

$$N = H. \cos(n''nn')^2. (nn')^2 \dots \dots \dots (\delta)$$

Wegen (α) und (β) sind mithin die in (γ) und (δ) gefundenen M und N durchaus gleich und haben den gemeinschaftlichen Werth

$$H. v^2 \cos^2 \psi.$$

Hieraus folgt, wie auf Seite 99 auseinandergesetzt ist, dass eine Ablenkung von der Richtung co durch die gegen m und n wirkenden Widerstände nicht hervorgebracht wird. Da dasselbe nun für jede zwei andere, von der Richtung co gleichweit abliegende Punkte, in derselben Weise gilt, so gilt es für alle.

Die von dem Herrn Verfasser beabsichtigte Erklärungsweise reicht mithin nicht aus, den wahren Grund der Ablenkung der Artilleriegeschosse aufzudecken.

35. Wir haben in dem Vorstehenden nach un-

sern besten Wissen und nach der sorgfältigsten Recherche Alles zusammengestellt, was über den Gegenstand dieser Abhandlung bis jetzt erschienen ist. Wir haben jede der besprochenen Arbeiten nach unsern besten Kräften einer reiflichen Erwägung unterworfen, nicht in der Stimmung eines krittelnden Recensenten, der an den Missgriffen seines Tutors eine Art von Vergnügen findet, sondern, da wir selbst Artillerist sind, und dieser Gegenstand uns selbst seit lange beschäftigt, mit dem aufrichtigsten Wunsche, endlich den räthselhaften Grund der für die artilleristische Praxis so einflussreichen Erörterungen aufzufinden, welche in den N^o. 2 und 3 speciell angegeben sind.

Wenn wir bei dieser Prüfung alles Vorhandenen uns nicht geirrt haben, so würde nunmehr der auf Seite 70 sub C bezeichnete Fall eintreten, dass nemlich dieser Gegenstand so dunkel ist als zuvor, und dass keiner von allen den angeführten Autoren etwas dafür gethan hat, ihn aufzuklären.

Unter diesen Umständen ist es natürlich, auf den sub d, Seite 71 angedeuteten Gedanken zurückzukommen, nemlich:

„dass von den möglicherweise einflussreichen

„Umstände einer (und zwar der wesentliche) bisher noch unbeachtet geblieben sein müsse.“

Da die in Rede stehenden Ablenkungen der Geschosse augenscheinlich nur von der Umdrehung herrühren, und diese sich zunächst dahin äußert, dass einerseits die Elemente der Oberfläche der Geschosse Mitteilungen annehmen, welche gegen die der Bewegung des Drehpunktes schief liegen, andererseits die Bewegung der Elemente auf der einen Seite beschleunigt, auf der andern aber verzögert wird, so war es höchst auffällig, dass die Benützung dieses Umstandes nicht zu der gewünschten Aufklärung führe, wie wir namentlich auf Seite 99 und ferner gezeigt haben. Da ferner die eben genannten Umstände von der Art der Erzeugung der Umdrehung ganz unabhängig sind, so hätten die zu findenden Auflösungen auch für den Fall gelten müssen, wenn Schwerpunkt und Mittelpunkt zusammenfiel und eine Tangentialkraft die Umdrehung hervorgebracht hätte. Das heisst, wenn man in den von Herrn Poisson gefundenen Differentialgleichungen, oder in den sub [7], [8], Seite 75, oder in den sub [25], [26], Seite 88 und 89 aufgestellten das Symbol der Excentricität ε gleich Null setzt, so hätte noch das Symbol w der Wir-

Weggeschwindigkeit zurückbleiben müssen. Dies ist aber nicht der Fall; für $\varepsilon = 0$ gehen alle Differentialgleichungen in die für die gewöhnliche Betrachtung ohne Berücksichtigung der Umdrehung über.

36. Nach allem Diesem glaube ich nun, den wahren Grund für die durch die Umdrehung hervorgerufenen Ablenkungen der Geschosse in folgendem Umstande zu finden:

Diejenigen, welche sich bisher mit diesem Problem beschäftigt haben, haben ohne alle Ausnahme (ausdrücklich oder stillschweigend) immer vorausgesetzt,

„dass die Dichtigkeit der Luft vor der vorderen Fläche des Geschosses und in Beziehung auf den vordersten Punkt derselben symmetrisch verteilt sei, dergestalt, dass Punkten der vorderen Fläche, welche um genau gleich grosse Progen von dem vordersten Punkte abliegen, auch genau gleich grosse Dichtigkeiten der davor aufgeträufelten Luft entsprechen.“

Allein;

„Diese Voraussetzung ist falsch, vielmehr ist die Dichtigkeit der Luft vor denjenigen Punkten, welche vermöge der Umdrehung die grössere Ge-

„ Geschwindigkeit haben, auch grösser, als vor derje-
 „ nigen Punkten in gleichem Abstände vorn vor-
 „ dersten Punkte, deren absolute Geschwindigkeit
 „ durch die Umdrehung vermindert wird, so dass
 „ diejenige Hälfte der vorderen Fläche, wo die grö-
 „ sseren Geschwindigkeiten statt haben, auch ei-
 „ nen grösseren Luftwiderstand erleidet.“

Um dies nachzuweisen, denke man sich den Mittel-
 punkt der Kugel als den Drehpunkt, und durch
 ihn und die Tangente der Bahn des Mittelpunkts
 eine Ebene gelegt, welche zugleich die Drehachse
 senkrecht schneidet. Diese Ebene sei die des Papiers,
 siehe Figur 8. Sei abc der grösste Kreis der Kugel. Fig 8.
 PQ die Richtung der fortschreitenden Bewe-
 gung; die Drehachse steht senkrecht auf der Ebene
 des Papiers und schneidet sie im Punkte C . Man
 hebe die zwei Punkte a und b heraus, welche beide
 um einen gleich grossen Bogen $na = nb$ von dem
 vordersten Punkte n abstehen. Die fortschreiten-
 de Geschwindigkeit aller Punkte der Kugel sei in
 Grösse und Richtung dargestellt durch $at = be$,
 welche selbstredend parallel zu PQ liegen. Sei ad
 = bf die gemeinschaftliche Umdrehungsgeschwindig-
 keit der Punkte des Umfanges von vorliegendem
 Kreise, so dass also ad und bf auf aC und respec-

tive auf bC senkrecht stehen. Man vollende die Parallelogramme der Geschwindigkeiten $adgc$ und $bfhe$, um in den Diagonalen ag und bh die wahren Geschwindigkeiten der Punkte a und b nach Grösse und Richtung zu finden. Diese Geschwindigkeiten nun zerlege man wieder in zwei andere, von denen die einen, ai und respective bm parallel zu PQ liegen, die andern aber, ak und respective bl , senkrecht darauf, so leuchtet ein, dass die Geschwindigkeit ai , mit welcher der Punkt a parallel zu PQ fortgeht, merklich grösser sein müsse, als die entsprechende Geschwindigkeit bm für den Punkt b .

Bis hierher sind alle meine Vorgänger gelangt, und aus diesem Umstande an sich, in Verbindung mit dem für die Vertheilung der Luftdichtigkeit geringbaren Ansichten, glaubten sie, die besprochenen Ablenkungen erklären zu können — wir haben nachgewiesen, dass dem nicht so ist.

Man kann sich nur die Bewegung des Mittelpunktes C während eines unendlich kleinen Zeittheilchens als gleichförmig und geradlinig, also der Richtung PQ beharrlich folgend denken, auch kann man gleichzeitig die Umdrehungsgeschwindigkeit als gleichförmig ansetzen. Dann werden in

den aufeinander folgenden unendlich kleinen Zeittheil-
chen der zweiten Ordnung, statt des Punktes n , wel-
cher jetzt der vorderste ist, der Punkt q nach o und
später der Punkt t nach p gelangen und die vor-
derste Stelle einnehmen. Zu denselben Zeitpunk-
ten wird correspondirend ein Punkt r in die Stelle
von u und später ein Punkt s an die Stelle von
 v getreten sein. Sobald aber die Flächenelemente,
welche den Punkten r und s entsprechen, in die
neuen Stellen u , v gelangt sind; werden sie dort ge-
gen die Richtung ai genau wieder dieselben Win-
kel bilden, als das Flächenelement a , auch wird
ihnen eine ganz gleiche Geschwindigkeit, wie die durch
 ai dargestellte inne wohnen, und zwar mit der
Richtung der letzteren zusammenfallend.

Die Theilchen der in der ursprünglichen Richtung
 ai liegenden Luftsäule werden also in den auf
einander folgenden unendlich kleinen Zeittheilchen
der zweiten Ordnung durch die vermöge der Umde-
hung immer aufs Neue herzutretenden Flächene-
lemente immer wieder aufs Neue gestossen und
zwar mit Geschwindigkeiten und unter Richtun-
gen, welche alle der anfänglichen in a völlig gleich
sind. Ganz Analoges findet in der Richtung be
statt.

Vergleichen wir nun das, was in der Richtung ai geschieht, mit dem, was in der Richtung bm erfolgt, etwas näher, so ergibt sich Natürlicheres:

a, die Anzahl der Stösse, welche die unbestimmt lang gedachte Luftsäule aE erhält, ist genau gleich der, welche die Luftsäule bF bekommt,

b, der Winkel, unter welchem die Luftsäule aE von den zugehörigen Flächenelementen getroffen wird, ist genau gleich dem, unter welchem die betreffenden Flächenelemente die Luftsäule bF stossen.

c, dagegen ist die Geschwindigkeit, mit welcher jeder einzelne Stoss in der Richtung aE erfolgt, erheblich grösser, als die, mit welcher jeder einzelne Stoss in der Richtung bF geschieht.

Nichts ist also natürlicher, als dass die Dichtigkeit der Luft in der Luftsäule aE allmählich erheblich grösser wird, als die in der Luftsäule bF .

Betrachten wir noch die Seitengeschwindigkeiten, so fallen die Richtungen von denen der linken Seite, wie aus ak ersichtlich, sämtlich in das Innere der Kugel, haben also auf das Vorige keinen Einfluss; dagegen wirken die der rechten Seite, wie bl dahin, die Luftpartikelchen abwärts zu treiben. Dieser Umstand kann mithin nur dazu beitragen, die Dichtigkeit der Luft auf der rechten Seite

noch mehr zu vermindern.

109

Das Endergebniss ist dieses:

- " Von je zwei Flächenelementen, welche beide
- " gleich weit von P abstehen, hat vor demjenigen,
- " dessen Geschwindigkeit durch die Umdrehung
- " vergrössert wird, eine grössere Verdichtung der
- " Luft statt, als vor demjenigen, dessen Geschwin-
- " digkeit durch die Umdrehung vermindert wird,"

und dieser Umstand enthält die Lösung des Mäth-

sels. Bezeichnet nun

ψ den $L nCa = nCb$,

v die gemeinschaftliche fortschreitende Geschwindig-

keit $ac = bc$,

f die Grösse der Flächenelemente der Mantelfläche

bei a und b

A und B die Dichtigkeit der Luft, respective in den

Punkten a und b ,

Δ einen unbestimmten constanten Factor,

L den Luftwiderstand normal auf das Flächenele-

ment a ,

M den Luftwiderstand normal auf das Flächenele-

ment b ;

so findet man auf demselben Wege, wie er Seite 100

und 101 eingezeichnet worden ist, und wenn wir

den Luftwiderstand dem Quadrat der Geschwindig-

heit proportional setzen,

$$L = \Delta \cdot f \cdot v^2 \cos \psi^2 \cdot A.$$

$$M = \Delta \cdot f \cdot v^2 \cos \psi^2 \cdot B.$$

Jeden dieser normalen Widerstände zerlege man nun in zwei andere, von denen der eine parallel zu PQ geht, der andere aber senkrecht auf jener Richtung ist. Die Theile der ersten Art stellen sich nur der fortschreitenden Bewegung entgegen und kommen hier nicht weiter in Betracht. Die andern aber bewirken eine Ablenkung und interessieren uns daher. Seien L_1 und M_1 diejenigen Kräfte, welche respective aus L und M durch diese Zerlegung nach der auf PQ senkrechten Richtung hervorgehen, so hat man

$$L_1 = L \cdot \sin \psi$$

$$M_1 = M \cdot \sin \psi$$

oder

$$L_1 = \Delta \cdot f \cdot v^2 \cos \psi^2 \cdot \sin \psi \cdot A,$$

$$M_1 = \Delta \cdot f \cdot v^2 \cos \psi^2 \cdot \sin \psi \cdot B.$$

Sie wirken in entgegengesetzten Richtungen. Nehmen wir diejenige, nach welcher L_1 wirkt, als die positive an, verlegen sodann beide Kräfte nach dem Schwerpunkt des Geschosses und vereinigen sie daselbst, so tritt dort eine Kraft

$$L_1 - M_1 = \Delta \cdot f \cdot v^2 \cos \psi^2 \cdot \sin \psi \cdot (A - B)$$

in Wirksamkeit, welche den Schwerpunkt von der ursprünglichen Position abzutreiben sucht. Da nun y absolut gedacht ist, alle übrigen Grössen wesentlich positiv sind und nach dem vorigen $It > Pr$ ist, so ist die Kraft $L_1 - M$, eine positive und die Ablenkung erfolgt in der Richtung der L_1 , das heisst, nach dem, was der Pfeil und die Lage von a und b bezeichnen,

nach derselben Richtung, nach welcher die vordere Fläche des Geschosses sich dreht, folglich genau in Übereinstimmung mit dem, was die Erfahrung zeigt.

Was hier von den beiden Punkten a und b gesagt ist, lässt sich leicht über die ganze vordere Fläche der Kugel ausdehnen.

Alles Vorangeführte gilt, der Schwerpunkt mag mit dem Mittelpunkt zusammenfallen oder nicht, so dass mithin

auch eine völlig homogene und concentrische Kugel, welche durch irgend eine Veranlassung eine Umdrehungsbewegung erhalten hat, durch diese aus ihrer Position nach derjenigen Richtung hin abgelenkt wird, nach welcher ihre vordere Fläche sich dreht.

37. Das ganze Sachverhältniss ist so einleuchtend, dass man, nachdem es einmal mit Bestimmtheit ausgesprochen ist, wohl kaum noch Zweifel an seiner Richtigkeit hegen kann und dabei so überaus einfach, dass man sich mit Verwunderung fragen muss, warum es nicht längst aufgeklärt worden ist. Zwölf Jahre der eifrigsten und unausgesetztesten Nachforschungen sind nicht im Stande gewesen, mich selbst darauf zu bringen, und als der grösste Theil dieser Abhandlung fertig geschrieben war, hatte ich noch keine Ahnung davon. Da führte mich ein glücklicher Augenblick auf den Gedanken, einmal die Richtigkeit der Voraussetzung der symmetrischen Vertheilung der Luftdichtigkeit zu prüfen und nun konnte mir natürlich der wahre Zusammenhang der Sache nicht mehr entgehen.

Es kann nun nicht mehr befremden, warum die Untersuchungen des Herrn Poisson, so wie meine eigenen, welche in den Nummern 24 bis 31 dieser Abhandlung besprochen worden sind, zu nichts führen konnten. Der einzig wesentliche Punkt war dabei gar nicht zur Sprache gekommen.

Dass endlich die Fliehkraft nichts mit dieser Angelegenheit zu thun hat, würde, wenn man noch irgend Zweifel darüber haben könnte, aus dem Schluss

der Seite 111 in schlagender Weise folgen.

113.

38. Und nun kann kein Zweifel darüber obwalten, wohin die nächsten Bestrebungen zu richten sind.

Man muss den Durchmesser des Geschosses, seine fortschreitende Geschwindigkeit und seine Umdrehungsgeschwindigkeit u. s. w. als gegeben ansehen und für diese Data das Gesetz der Vertheilung der Dichtigkeit der vor der vorderen Fläche aufgeträuften Luft festzustellen suchen. Allerdings ist diess eine sehr schwierige Aufgabe, allein es ist schon sehr viel dadurch gewonnen, dass man nunmehr genau den Punkt weiss, worauf es ankommt.

Ist jenes Gesetz aufgefunden, so hat die Ermittlung der Praxis bei dem gegenwärtigen Zustande der Mechanik und der reinen Mathematik keine Schwierigkeit mehr. Sie bietet dann ein einfaches analytisches Mechanikbeispiel dar, zu dessen Lösung, wenn man überhaupt mit dergleichen umzugehen weiss, nur etwas Überlegung, Geduld und Aufmerksamkeit erforderlich ist.

Dem geneigten Leser werden die vielfachen Unbe-
trüfflichkeiten des Stils und andere Verstöße gegen
die Form in der vorliegenden Abhandlung nicht
entgehen. Der Verfasser bittet deshalb um Nach-
sicht. Diese Arbeit musste unter ziemlich presshaf-
ten Umständen unternommen und durchgeführt
und der größte Theil davon niedergeschrieben wer-
den, ohne dass zuvor ein Concept davon entwor-
fen werden konnte.

Berlin den 20^{ten} September 1843.

Otto.

Fig: 1.

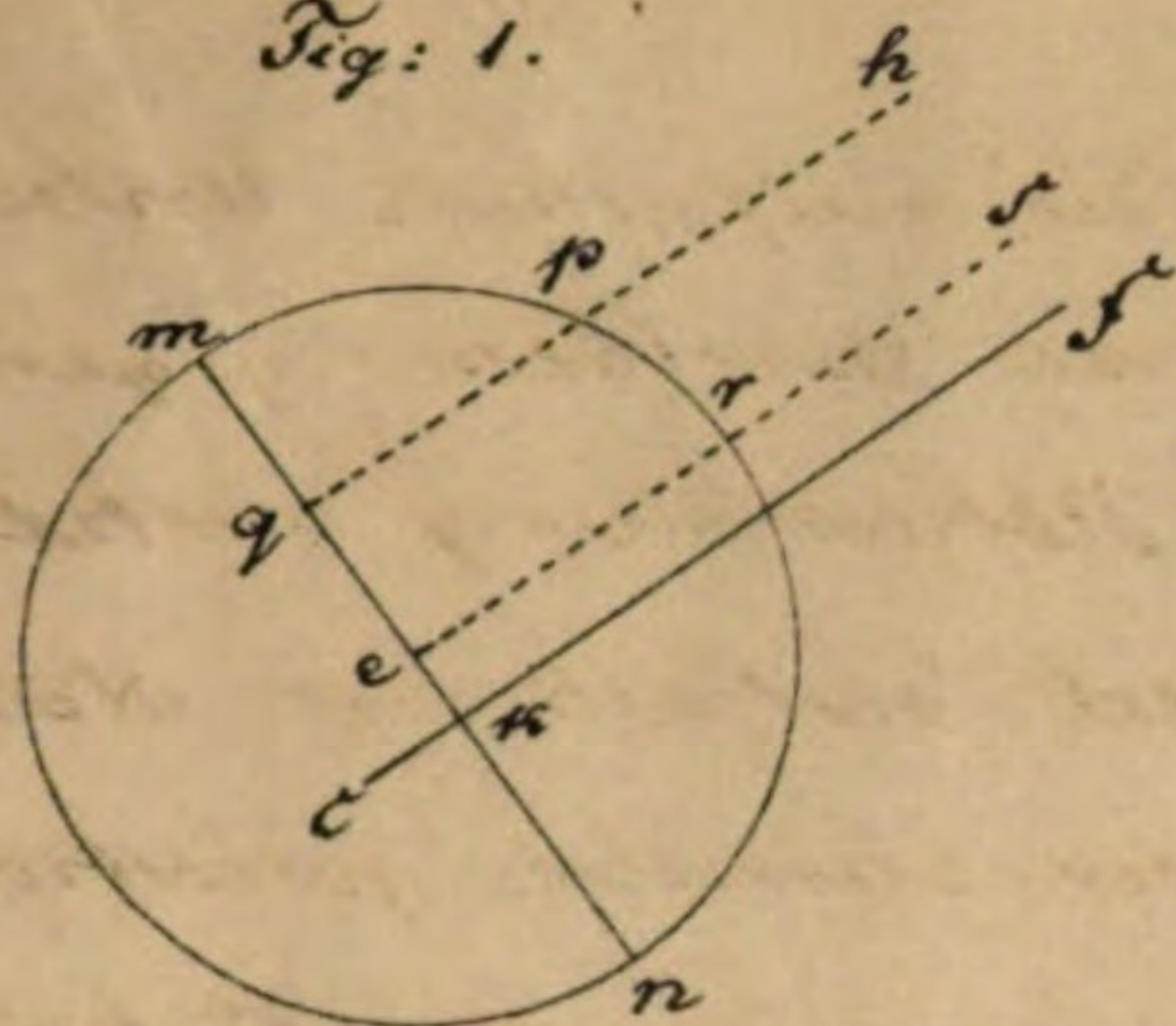


Fig: 2.

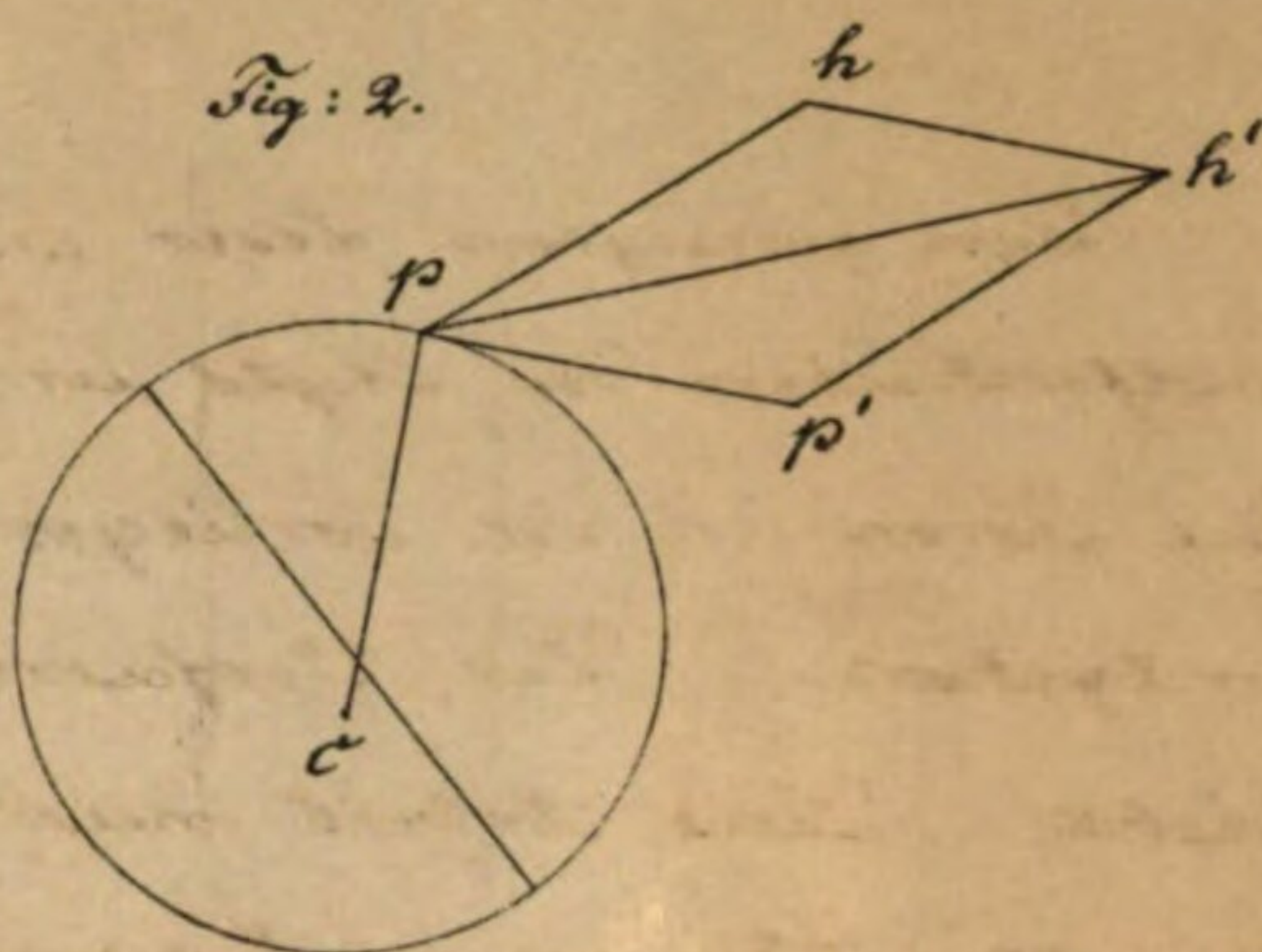


Fig : 3.

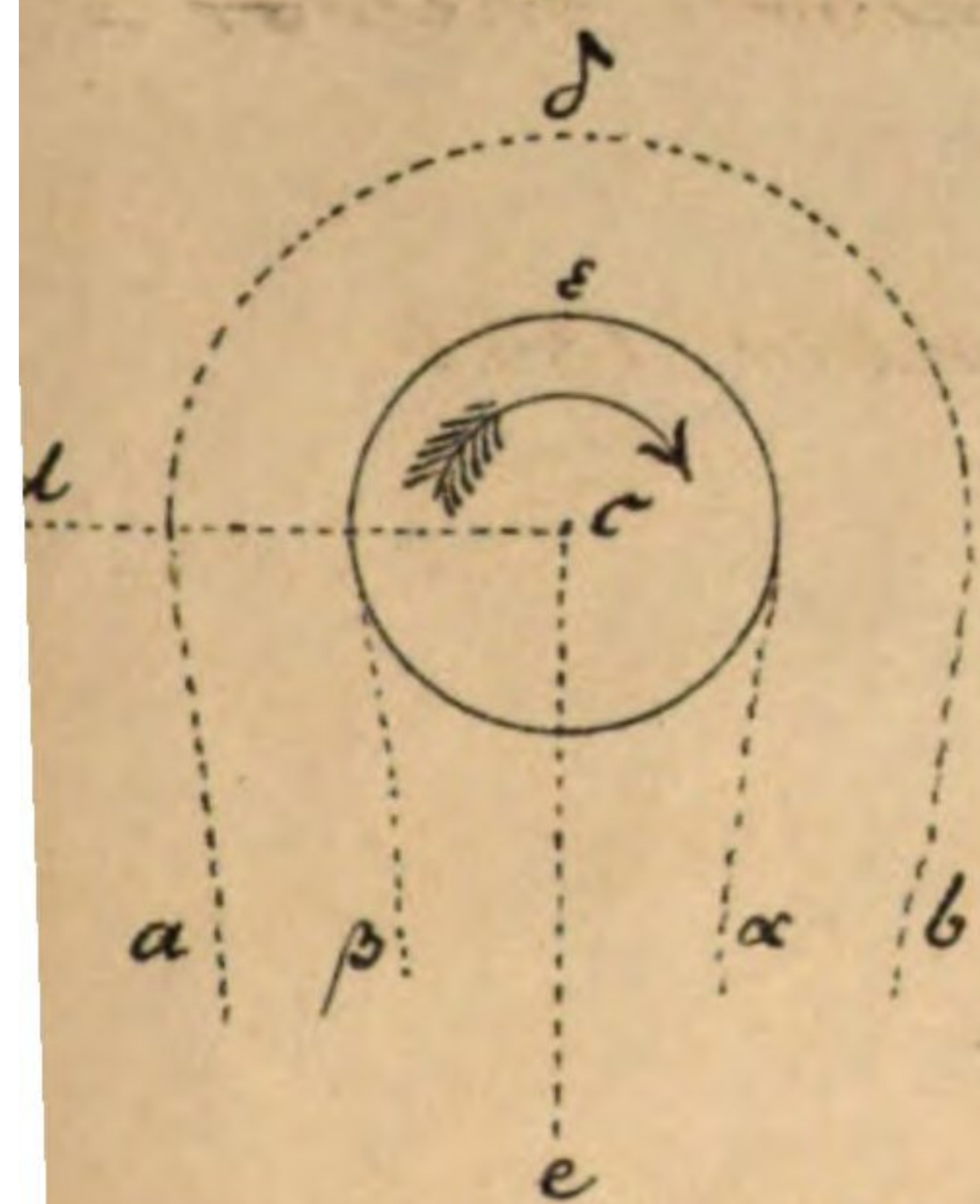


Fig: 4

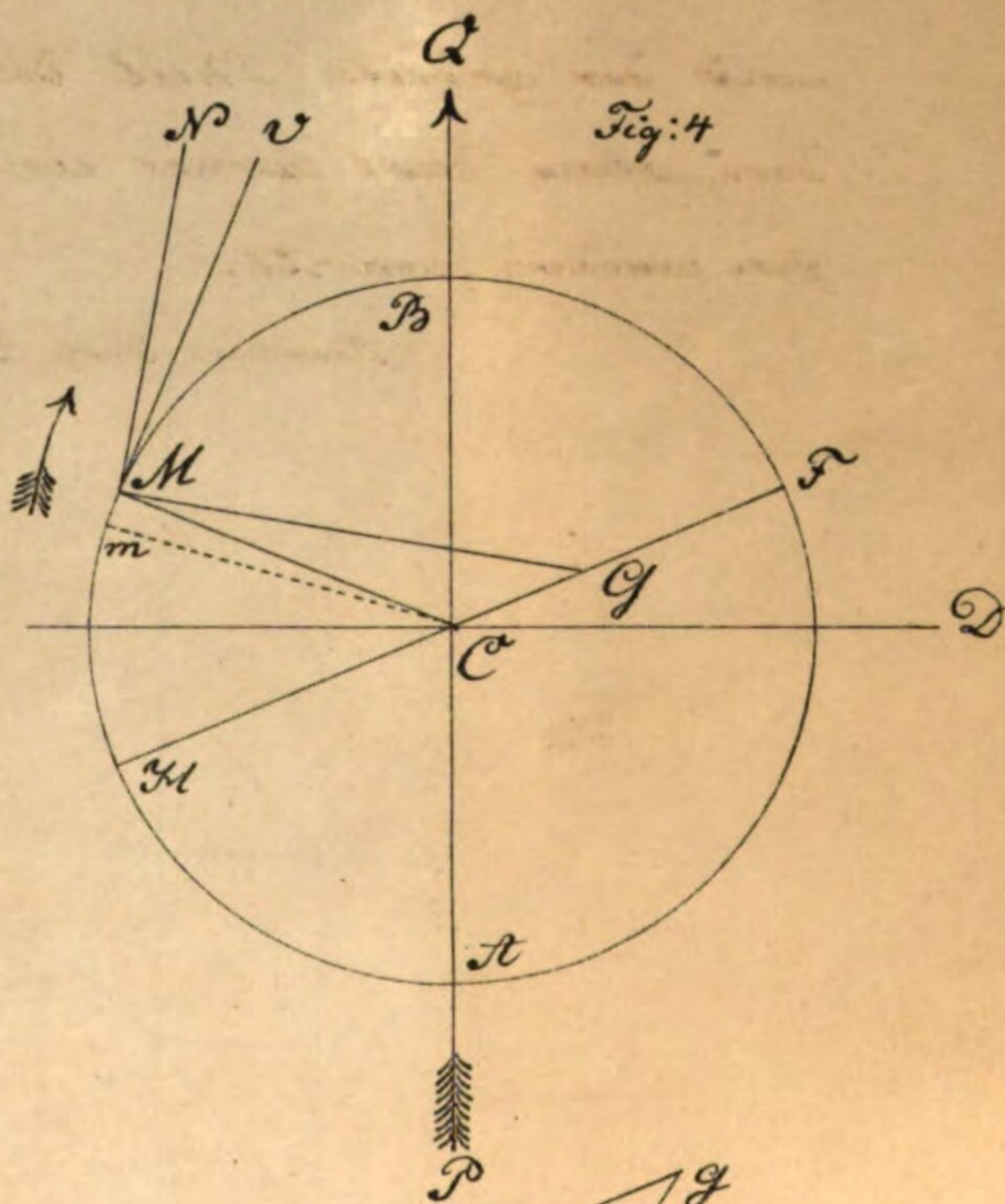


Fig: 5

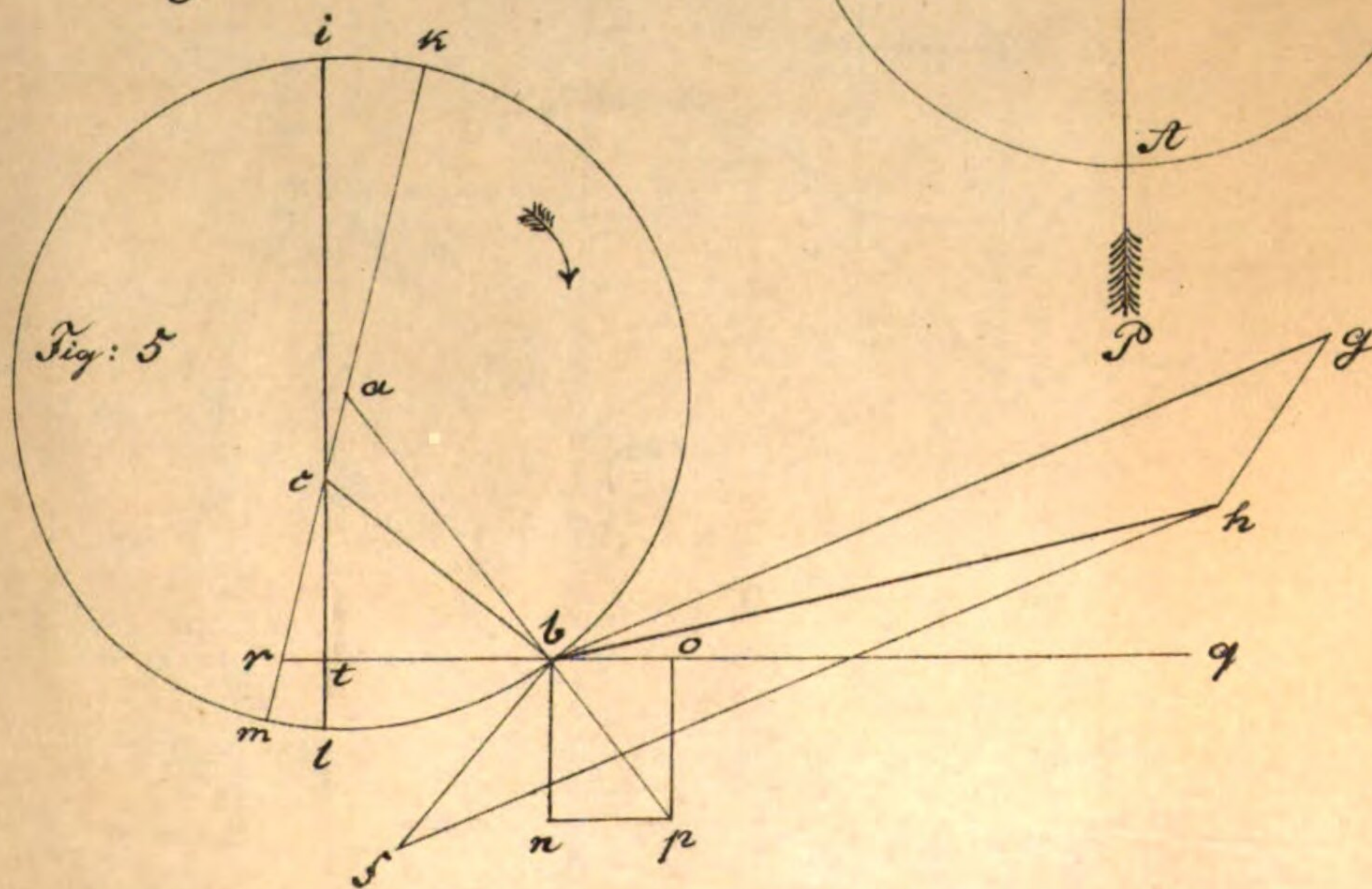


Fig: 6

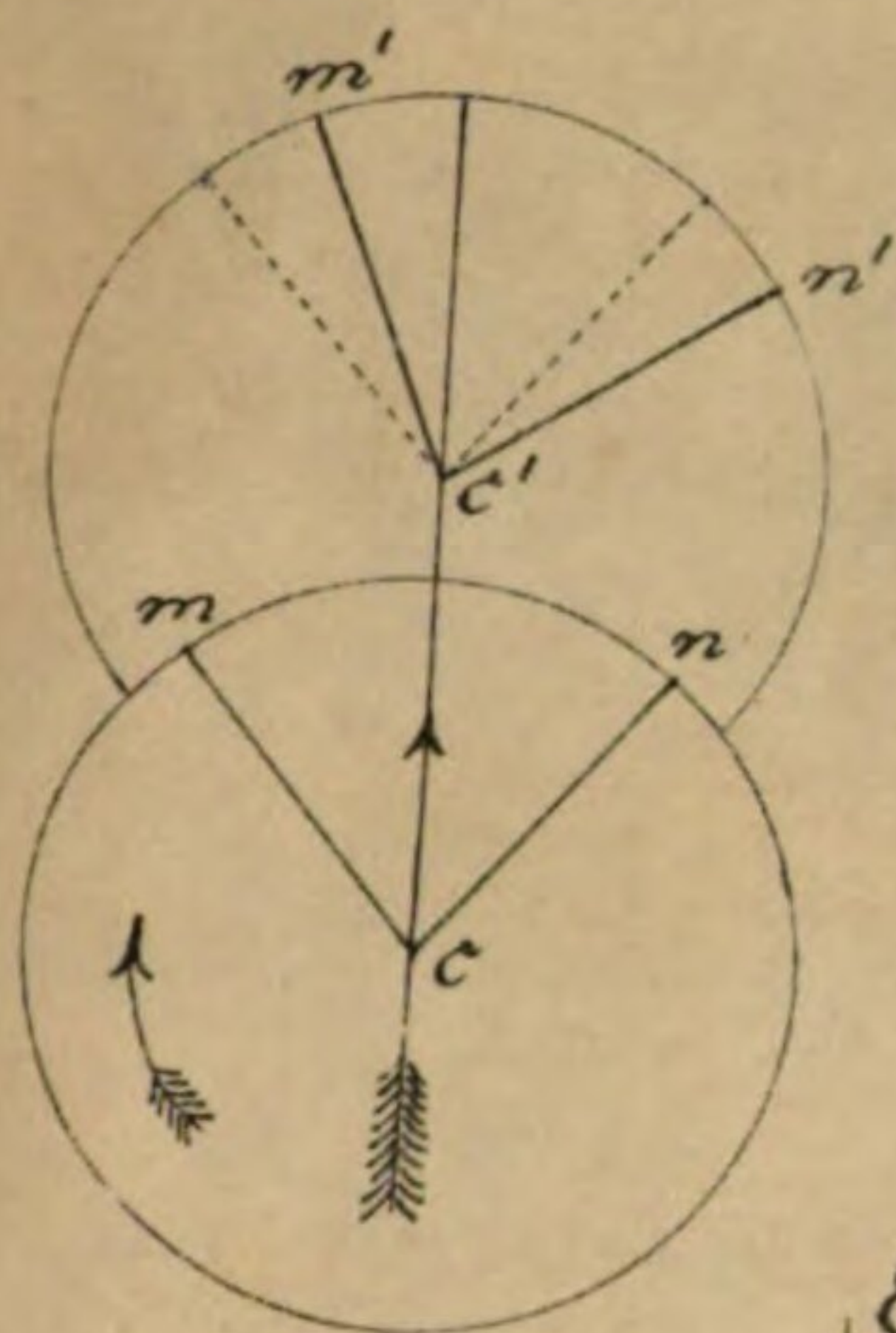
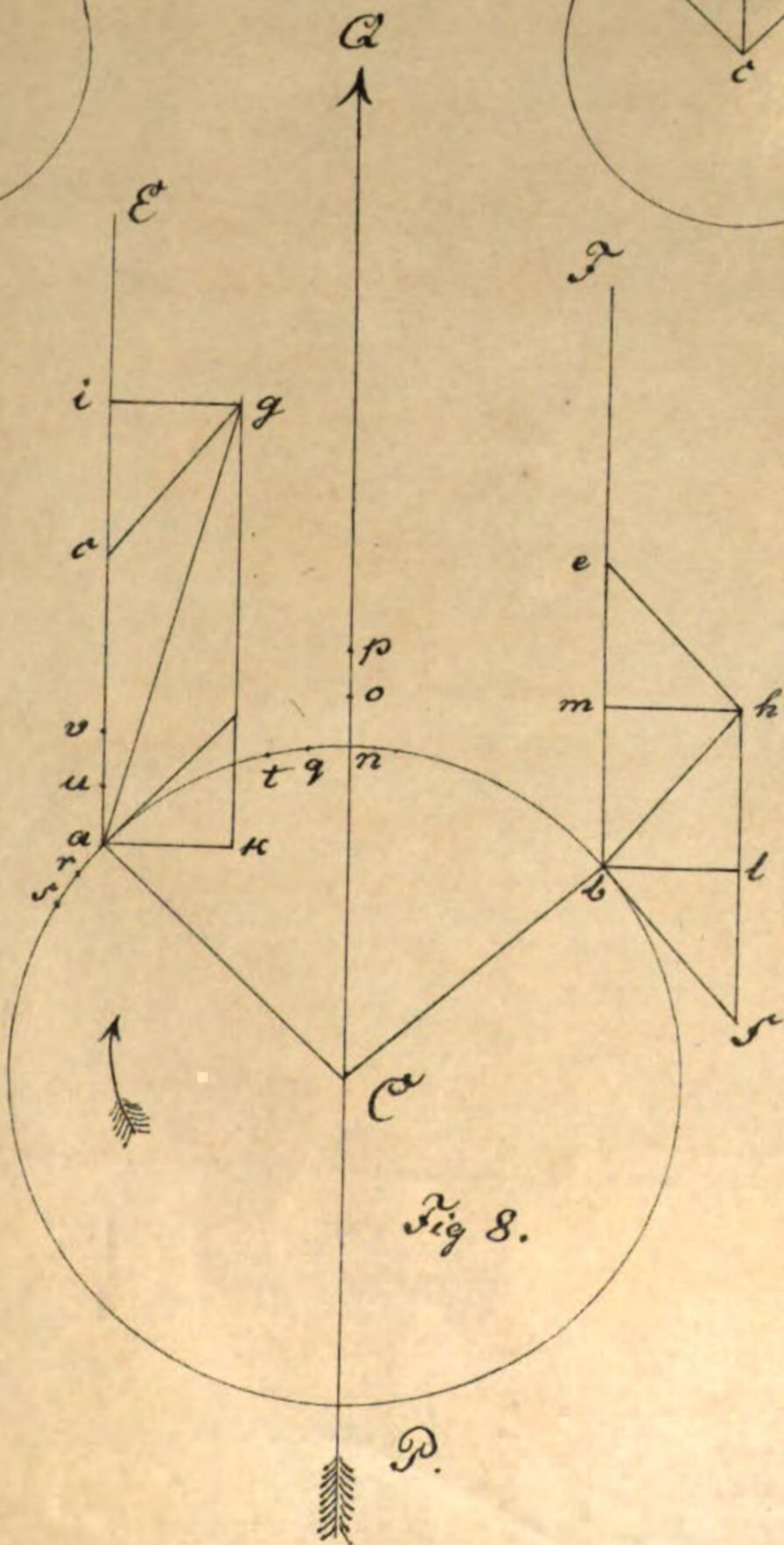
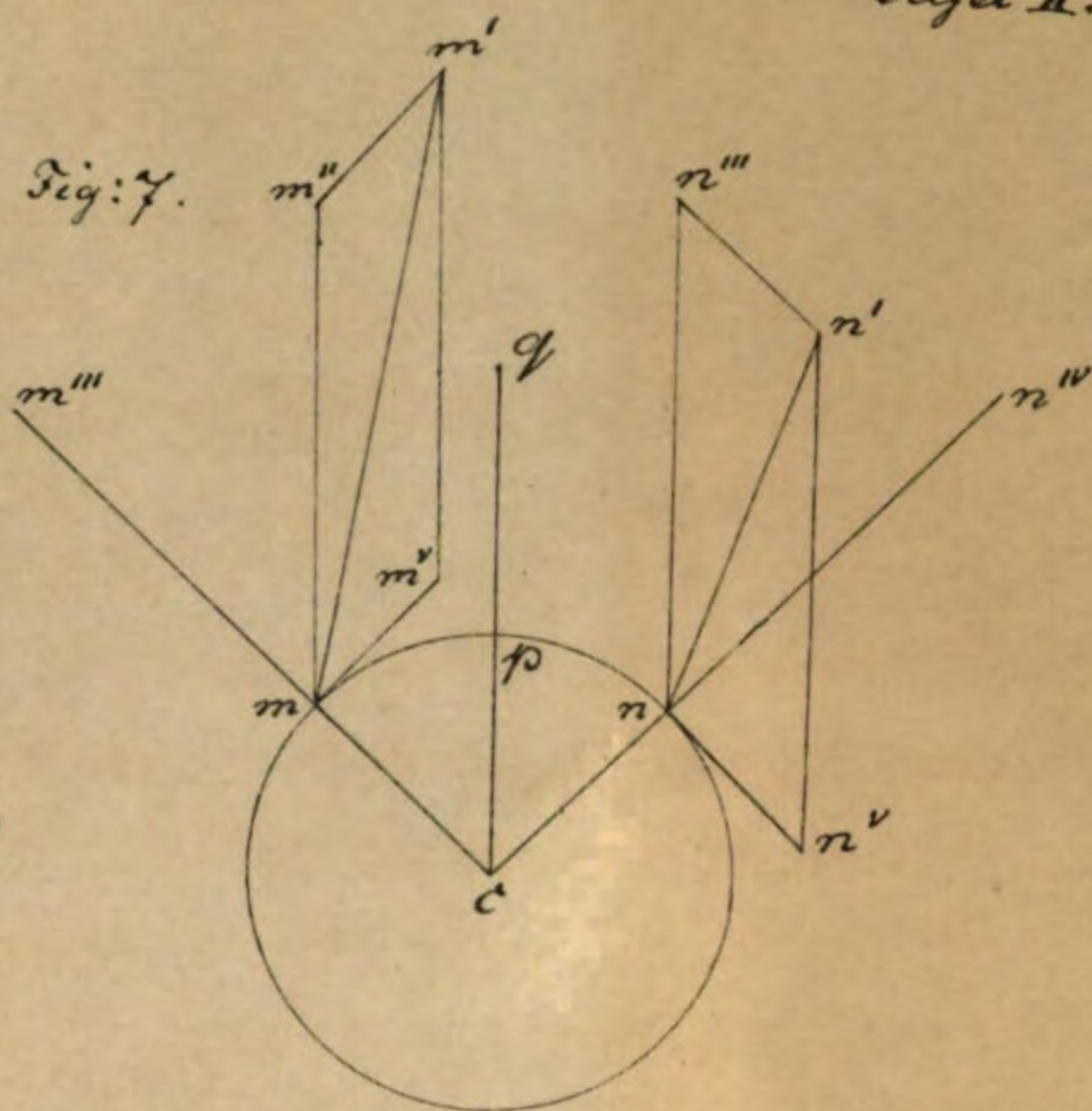


Fig: 7.



Otto, F.,

Ueber die Umdrehung der Artillerie-Geschosse

Bd.: 1

Berlin 1843

4 App.mil. 62 t-1/2,1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10220918-0